3. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} F_1\left(t, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) = 0, \\ F_2\left(t, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) = 0, \\ .... \\ F_n\left(t, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) = 0, \end{cases} \qquad \textbf{(49)}$$

где t – независимая переменная, y_1, y_2, ..., y_n – искомые функции, y_1', y_2', ..., y_n' – их производные, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка.**

Если эту систему разрешить относительно производных от неизвестных функций, то получим **нормальную систему** дифференциальных уравнений I порядка:

$$\begin{cases} y_1' = f_1\left(t, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ y_2' = f_2\left(t, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ .... \\ y_n' = f_n\left(t, y_1, y_2, ..., y_n\right), \end{cases} \qquad \textbf{(50)}$$

где функции f_1, f_2, ..., f_n определены в некоторой области D переменных t, y_1, y_2, ..., y_n.

Совокупность n функций $y_1=y_1(t)$, $y_2=y_2(t)$, ... , $y_n=y_n(t)$, непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b), называется **решением** нормальной системы (50), если эти функции при подстановке в уравнения системы, обращают их в тождества.

ТЕОРЕМА КОШИ.

Если функции $f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n)$, ..., $f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ и их частные производные по y_1, y_2, ..., y_n определены и непрерывны в окрестности точки $\left(t_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0\right) \in \mathrm{D}$, то всегда найдется некоторый интервал с центром t_0, в котором существует единственное решение системы (50), удовлетворяющее начальным условиям $y_1\left(t_0\right) = y_1^0, y_2\left(t_0\right) = y_2^0, ..., y_n\left(t_0\right) = y_n^0$, где $y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ – заданные числа.

ЗАДАЧА КОШИ. Найти решение $y_1=y_1(t)$, $y_2=y_2(t)$, ..., $y_n=y_n(t)$ системы (50), удовлетворяющее **начальным условиям**: $y_1\left(t_0\right) = y_1^0, y_2\left(t_0\right) = y_2^0, ..., y_n\left(t_0\right) = y_n^0$, где $y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ – заданные числа; $t_0 \in (a, b)$.

Общим решением системы (50) называется совокупность функций $y_1=\varphi_1(t, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2=\varphi_2(t, C_1, C_2, ..., C_n)$, ..., $y_n=\varphi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n)$, зависящих от n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n и удовлетворяющих условиям:

1) функции φ_1, φ_2, ..., φ_n определены в некоторой области изменения переменных t, C_1, C_2, ..., C_n и имеют непрерывные частные производные по t;

2) совокупность φ_1, φ_2, ..., φ_n является решением системы (50) при любых значениях C_1, C_2, ..., C_n;

3) для любых начальных условий $y_1\left(t_0\right) = y_1^0, y_2\left(t_0\right) = y_2^0, ..., y_n\left(t_0\right) = y_n^0$ из области D, где выполняются условия теоремы Коши, всегда найдутся такие значения произвольных постоянных $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, что будут справедливы равенства $y_1^0 = \varphi_1\left(t_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$, $y_2^0 = \varphi_2\left(t_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$, ..., $y_n^0 = \varphi_n\left(t_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$.

Частным решением системы (50) называется решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$

Если правые части нормальной системы (50) являются линейными относительно неизвестных функций y_1, y_2, ..., y_n, то такая система называется **линейной** и имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + ... + a_{1n}(t)y_n + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + ... + a_{2n}(t)y_n + f_2(t), \\ .... \\ y_n' = a_{n\,1}(t)y_1 + a_{n\,2}(t)y_2 + ... + a_{n\,n}(t)y_n + f_n(x). \end{cases} \qquad \textbf{(51)}$$

где $a_{11}(t)$, $a_{12}(t)$, ... , $a_{1n}(t)$, $a_{21}(t)$, $a_{22}(t)$, ..., $a_{2n}(t)$,…, $a_{n1}(t)$, $a_{n2}(t)$, ..., $a_{nn}(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ − заданные в некоторой области D функции.

Если хотя бы одна из функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ не равна нулю, то система (51) называется **линейной неоднородной.**

Если все функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ тождественно равны нулю, то система (51) называется **линейной однородной** и имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + ... + a_{1n}(t)y_n \ , \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + ... + a_{2n}(t)y_n \ , \\ .... \\ y_n' = a_{n\,1}(t)y_1 + a_{n\,2}(t)y_2 + ... + a_{n\,n}(t)y_n \ . \end{cases} \qquad \textbf{(52)}$$

Если все коэффициенты систем (51) и (52) постоянные, то есть $a_{11}(t)=a_{11}$, $a_{12}(t)=a_{12}$, ..., $a_{1n}(t)=a_{1n}$, $a_{21}(t)=a_{21}$, $a_{22}(t)=a_{22}$, ..., $a_{2n}(t)=a_{2n}$,…, $a_{n1}(t)=a_{n1}$, $a_{n2}(t)=a_{n2}$, ..., $a_{nn}(t)=a_{nn}$ (где a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n},…, a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn} – некоторые действительные числа), то системы называются **линейными с постоянными коэффициентами** и имеют вид соответственно:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}\ y_n + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}\ y_n + f_2(t), \\ .... \\ y_n' = a_{n\,1}y_1 + a_{n\,2}y_2 + ... + a_{n\,n}\ y_n + f_n(x). \end{cases} \qquad \textbf{(51′)}$$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}\ y_n \ , \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}\ y_n \ , \\ .... \\ y_n' = a_{n\,1}y_1 + a_{n\,2}y_2 + ... + a_{n\,n}\ y_n \ . \end{cases} \qquad \textbf{(52′)}$$

В следующих разделах рассмотрим **методы интегрирования** нормальной однородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (52′).

3.1. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

Метод исключения неизвестных – один из основных методов интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений (50). Данный метод заключается в том, что система приводится к одному уравнению n-го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Это может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного.

Рассмотрим систему (50): $$\begin{cases} y_1' = f_1\left(t, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ y_2' = f_2\left(t, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n\left(t, y_1, y_2, ..., y_n\right), \end{cases}$$

1) Продифференцируем n раз, например, первое уравнение системы, каждый раз подставляя в полученные выражения значения производных из системы (50). Полученные таким образом производные соберём в систему:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_1'' = \tilde{f}_2(t, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n)} = \tilde{f}_n(t, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

2) Из первых (n–1) уравнений системы (*) выразим функции $y_2, y_3, \dots, y_n$ через t, функцию y_1 и её производные $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$. Получим:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2\left(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right), \\ y_3 = \psi_3\left(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \psi_n\left(t, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right). \end{cases} \qquad \textbf{(**)}$$

3) Подставим найденные значения $y_2, y_3, \dots, y_n$ в последнее уравнение системы (*). В результате получим уравнение n-го порядка, содержащее одну неизвестную функцию y_1.
4) Найдём общее решение полученного уравнения.
5) Продифференцировав (n–1) раз это решение, подставим его вместе с найденными производными в систему (**) и найдём функции $y_2, y_3, \dots, y_n$.

Более подробно рассмотрим данный метод на системе **<u>двух линейных однородных уравнений</u>** с двумя неизвестными функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \qquad \textbf{(53)}$$

1) Продифференцируем первое уравнение по переменной t:

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}y'.$$

2) Подставим в полученное уравнение y' из второго уравнения системы (53):

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}(a_{21}x + a_{22}y),$$
$$x'' = a_{11}x' + a_{12} \cdot a_{21}x + a_{12} \cdot a_{22}y. \qquad (*)$$

3) Выразим y из первого уравнения системы (53):

$$y = (x' - a_{11}x) / a_{12}. \qquad (**)$$

4) Выражение для y подставим в уравнение (*):

$$x'' = a_{11}x' + a_{12} \cdot a_{21}x + a_{12} \cdot a_{22}(x' - a_{11}x) / a_{12},$$

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}\cdot a_{21}x + a_{22}(x' - a_{11}x),$$
$$x'' = a_{11}x' + a_{12}\cdot a_{21}x + a_{22}x' - a_{22}\cdot a_{11}x,$$
$$x'' - (a_{11} + a_{22})x' + (a_{22}\cdot a_{11} - a_{12}\cdot a_{21})x = 0.$$

5) Получили ЛОДУ II порядка с постоянными коэффициентами. Решив его по схеме 1 (раздел 2.2.1), найдем **функцию $x(t)$**.
6) Найдём производную $x'(t)$ и подставим ее вместе с $x(t)$ в уравнение (**). Получим **функцию $y(t)$.**

ПРИМЕР 21.

Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

Решение:

1) Продифференцируем первое уравнение по переменной t:
$$x'' = 6x' + 3y'.$$
2) Подставим в полученное уравнение y' из второго уравнения системы:
$$x'' = 6x' + 3\cdot(-8x - 5y),$$
$$x'' = 6x' - 24x - 15y. \qquad (*)$$
3) Выразим y из первого уравнения системы:
$$y = (x' - 6x) / 3. \qquad (**)$$
4) Выраженное y подставим в уравнение (*):
$$x'' = 6x' - 24x - 15\cdot(x' - 6x) / 3,$$
$$x'' = 6x' - 24x - 5\cdot(x' - 6x),$$
$$x'' = 6x' - 24x - 5x' + 30x,$$
$$x'' = x' + 6x,$$
$$x'' - x' - 6x = 0.$$
5) Решим полученное уравнение по схеме 1 (раздел 2.3).
$$k^2 - k - 6 = 0,$$
$D = 25$, $k_1 = 3$ – корень кратности 1.
$k_2 = -2$ – корень кратности 1.

По Таблице 1.1 (подставив вместо x переменную t) находим фундаментальную систему решений: $x_1 = e^{3t}$, $x_2 = e^{-2t}$.

(Если рассматривать систему более двух уравнений, то воспользоваться Таблицей 1).

По формуле (37) $\boldsymbol{x = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}}$.

6) Найдём производную $x'(t)$: $x' = 3C_1e^{3t} - 2C_2e^{-2t}$.

Подставим ее вместе с x в уравнение (**).
$$y = (3C_1e^{3t} - 2C_2e^{-2t} - 6\cdot(C_1e^{3t} + C_2e^{-2t})) / 3,$$
$$y = (3C_1e^{3t} - 2C_2e^{-2t} - 6C_1e^{3t} - 6C_2e^{-2t}) / 3,$$
$$y = (-3C_1e^{3t} - 8C_2e^{-2t}) / 3,$$
$$\boldsymbol{y = -C_1e^{3t} - 8/3\, C_2e^{-2t}}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}, \\ y = -C_1e^{3t} - \dfrac{8}{3}C_2e^{-2t}. \end{cases}$