2.2.2. Линейные неоднородные ДУВП с постоянными коэффициентами.

Положим в уравнении (35) $a_1(x) = p_1$, $a_2(x) = p_2$, ... , $a_n(x) = p_n$, где p_i – любые действительные числа ($i = \overline{1, n}$).

Получаем уравнение: $$\mathbf{y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + p_2\, y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = f(x)}. \quad (41)$$

Уравнение (41) называют **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением n-го порядка **с постоянными коэффициентами**.

Уравнение (41) отличается от уравнения (39) только правой частью *f(x)*.

Общее решение уравнения (41) находится по формуле (38): $\mathbf{y_{он} = y_{oo} + w}$,
где y_{oo} – общее решение соответствующего ему однородного уравнения (39),
w – одно из частных решений уравнения (41).

Если правая часть *f(x)* уравнения (41) имеет специальный вид:

$$\mathbf{f(x) = e^{ax}(P_r(x) \cos bx + Q_s(x) \sin bx)} \quad (42)$$

($P_r(x)$, $Q_s(x)$ – многочлены степени r и s соответственно; *a*, b – некоторые постоянные числа), то известна структура его частного решения:

$$\mathbf{w = x^m e^{ax}(\tilde{P}_t(x) \cos bx + \tilde{Q}_t(x) \sin bx)}, \quad (43)$$

где $\tilde{P}_t(x)$, $\tilde{Q}_t(x)$ – многочлены степени t = max{r, s}; m равно кратности корня характеристического уравнения (40), совпадающего с числом $z = a \pm bi$.

В таблице 2 приведены частные случаи формулы (42) и соответствующие им частные решения уравнения (41).

Таблица 2.

№	Вид правой части f(x)	z=*a*±bi	Структура частного решения (w): z – не корень характеристического уравнения.	Структура частного решения (w): z–корень характеристического уравнения кратности m.
1	$f(x) = P_r(x)$	z = 0	$w = \tilde{P}_r(x)$	$w = x^m \tilde{P}_r(x)$
2	а) $f(x) = e^{ax}$, б) $f(x) = Ce^{ax}$ (C=const)	z = *a*	$w = \tilde{C} e^{ax}$ ($\tilde{C}$ = const)	$w = x^m \tilde{C} e^{ax}$ ($\tilde{C}$ = const)
3	$f(x) = P_r(x)e^{ax}$	z = *a*	$w = \tilde{P}_r(x) e^{ax}$	$w = x^m \tilde{P}_r(x) e^{ax}$
4	а) f(x) = cos bx, б) f(x) = sin bx, в) $f(x) = C_0 \cos bx$, г) $f(x) = C_1 \sin bx$, д) f(x) = cos bx ± ± sin bx, е) $f(x) = C_0 \cos bx \pm \pm C_1 \sin bx$, ($C_0$, C_1 – const)	z = ±bi	$w = \tilde{C}_0 \cos bx + \tilde{C}_1 \sin bx$, ($\tilde{C}_0, \tilde{C}_1$ – const)	$w = x^m(\tilde{C}_0 \cos bx + + \tilde{C}_1 \sin bx)$, ($\tilde{C}_0, \tilde{C}_1$ – const)
5	а) $f(x) = P_r(x) \cos bx$, б) $f(x) = Q_r(x) \sin bx$, в) $f(x) = P_r(x) \cos bx \pm$	z = ±bi	$w = \tilde{P}_r(x) \cos bx + + \tilde{Q}_r(x) \sin bx$	$w = x^m(\tilde{P}_r(x) \cos bx + + \tilde{Q}_r(x) \sin bx)$

	$\pm Q_r(x)\sin bx$			
6	а) $f(x) = e^{ax}\cos bx$, б) $f(x) = e^{ax}\sin bx$, в) $f(x) = C_0 e^{ax}\cos bx$, г) $f(x) = C_1 e^{ax}\sin bx$, д) $f(x) = e^{ax}\cos bx \pm$ $\pm e^{ax}\sin bx$, е) $f(x) = C_0 e^{ax}\cos bx \pm$ $\pm C_1 e^{ax}\sin bx$, (C_0, C_1 – const)	$z=a\pm bi$	$w = e^{ax}(\tilde{C}_0\cos bx +$ $+\tilde{C}_1\sin bx)$, ($\tilde{C}_0, \tilde{C}_1$ – const)	$w = x^m e^{ax}(\tilde{C}_0\cos bx +$ $+\tilde{C}_1\sin bx)$, ($\tilde{C}_0, \tilde{C}_1$ – const)
7	а) $f(x)=P_r(x)e^{ax}\cos bx$, б)$f(x)=Q_r(x)e^{ax}\sin bx$, в)$f(x)=P_r(x)e^{ax}\cos bx\pm$ $\pm Q_r(x)e^{ax}\sin bx$	$z=a\pm bi$	$w = e^{ax}(\tilde{P}_r(x)\cos bx +$ $+\tilde{Q}_r(x)\sin bx)$	$w = x^m e^{ax}(\tilde{P}_r(x)\cos bx +$ $+\tilde{Q}_r(x)\sin bx)$
8	$f(x) = P_r(x)\cos bx\pm$ $\pm Q_s(x)\sin bx$	$z = \pm bi$	$w = \tilde{P}_t(x)\cos bx +$ $+\tilde{Q}_t(x)\sin bx$	$w = x^m(\tilde{P}_t(x)\cos bx +$ $+\tilde{Q}_t(x)\sin bx)$
9	$f(x) = P_r(x)e^{ax}\cos bx \pm$ $\pm Q_s(x)e^{ax}\sin bx$	$z=a\pm bi$	$w = e^{ax}(\tilde{P}_t(x)\cos bx +$ $+\tilde{Q}_t(x)\sin bx)$	$w = x^m e^{ax}(\tilde{P}_t(x)\cos bx +$ $+\tilde{Q}_t(x)\sin bx)$

По условию задачи известные величины:
C, C_0, C_1 – некоторые действительные числа,
$P_r(x)$, $Q_r(x)$ – многочлены степени r,
$Q_s(x)$ – многочлен степени s.

Неизвестными изначально, требующими нахождения являются:
$\tilde{C}, \tilde{C}_0, \tilde{C}_1$ – некоторые действительные числа,
$\tilde{P}_r(x), \tilde{Q}_r(x)$ – многочлены степени r с неопределенными коэффициентами,
$\tilde{P}_t(x), \tilde{Q}_t(x)$ – многочлены степени t с неопределенными коэффициентами, где $t = \max\{r, s\}$.
(Как составляются многочлены с неопределенными коэффициентами см. **замечание**, приведенное в схеме 2.)

При решении ЛНДУ с постоянными коэффициентами (41) и стандартной правой частью вида (42) будем придерживаться следующей схемы (схема 2):
1) Составить ЛОДУ с постоянными коэффициентами, соответствующее данному неоднородному.
2) Решить составленное однородное уравнение, следуя пунктам 1–5 схемы 1.
3) По виду правой части уравнения (41) составить число $z = a \pm bi$ (см. таблицу 2).
4) Проверить, является ли число $z = a \pm bi$ корнем характеристического уравнения, которое возникает в процессе решения ЛОДУ.
   а) Если $z = a \pm bi$ не совпадает с корнем k характеристического уравнения, то для составления структуры частного решения w нужно воспользоваться предпоследним столбцом таблицы 2.
   б) Если $z = a \pm bi$ совпадает с корнем k (кратности m) характеристического уравнения, то для составления структуры частного решения w нужно воспользоваться последним столбцом таблицы 2.

Замечание.
Составляя многочлены с неопределенными коэффициентами, в качестве неизвестных коэффициентов обычно используют прописные латинские буквы.
Например, многочлен I степени с неопределенными коэффициентами:
$\tilde{P}_1(x)$ = Ax + B (или $\tilde{Q}_1(x)$ = Cx + D);
многочлен II степени с неопределенными коэффициентами
$\tilde{P}_2(x)$ = $Ax^2 + Bx + C$ (или $\tilde{Q}_2(x)$ = $Dx^2 + Ex + F$);
многочлен III степени с неопределенными коэффициентами:
$\tilde{P}_3(x)$ = $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (или $\tilde{Q}_3(x)$ = $Kx^3 + Lx^2 + Mx + N$)
и т. д.

5) Продифференцировать n раз полученную функцию w, находя последовательно w', w'', w''', ... , $w^{(n)}$.
6) Подставить w, w', w'', w''', ... , $w^{(n)}$ в первоначальное уравнение вместо y, y', y'', y''', ... , $y^{(n)}$ соответственно.
7) В полученном уравнении раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.
8) Приравнять подобные слагаемые, стоящие в левой и правой частях уравнения. В результате получится система линейных уравнений.
9) Найти неопределенные коэффициенты, решив полученную систему линейных уравнений.
10) Подставить найденные значения коэффициентов в структуру частного решения w (составленного в пункте 4).
11) Найти общее решение по формуле (38): $y_{он} = y_{оо} + w$.

Для нахождения частного решения уравнения (41), удовлетворяющего некоторым начальным условиям (задача Коши), можно воспользоваться пунктами 6–9 схемы 1, заменив в ней $y_{оо}$, $y'_{оо}$, $y''_{оо}$, $y'''_{оо}$, ... , $y^{(n-1)}_{оо}$ на $y_{он}$, $y'_{он}$, $y''_{он}$, $y'''_{он}$, ... , $y^{(n-1)}_{он}$ соответственно.

ПРИМЕР 17.
Для каждого из данных ЛНДУ определить и записать структуру его частного решения.
а) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}(1 - x)$.
Решение:
1. $y'' - 8y' + 16y = 0$ – соответствующее ЛОДУ.
2. $k^2 - 8k + 16 = 0$ – характеристическое уравнение.
$(k - 4)^2 = 0$,
$k - 4 = 0$,
$k = 4$ – корень кратности 2.
3. $f(x) = e^{4x}(1 - x)$ – совпадает с третьей строкой таблицы 2 (где $P_1(x) = (1 - x)$ – многочлен
I-й степени, r = 1).
Тогда z = 4 (α = 4, β = 0)
4. z = 4 совпадает с k = 4 – корнем кратности 2, значит по последнему столбцу таблицы 2
$\mathbf{w = x^2 \tilde{P}_1(x) e^{4x}}$,
$\mathbf{w = x^2(Ax + B)e^{4x}}$ – структура частного решения
($\tilde{P}_1(x)$ = Ax + B – многочлен I-ой степени с неопределенными коэффициентами).
б) $y^{IV} + y'' = x^2 + 2x$.
Решение:
1. $y^{IV} + y'' = 0$ – соответствующее ЛОДУ.

2. $k^4 + k^2 = 0$ – характеристическое уравнение.

$k^2(k^2 + 1) = 0$,

$k^2 = 0$, $k = 0$ – корень кратности 2.

$k^2 + 1 = 0$, $k^2 = -1$, $k = \pm i$ – пара комплексно-сопряженных корней кратности 1.

3. $f(x) = x^2 + 2x$ – совпадает с первой строкой таблицы 2 ($P_2(x) = x^2 + 2x$ – многочлен II-ой степени, $r = 2$).

Тогда $z = 0$ ($\alpha = 0$, $\beta = 0$)

4. $z = 0$ совпадает с $k = 0$ – корнем кратности 2 характеристического уравнения, значит по таблице 2 $\mathbf{w = x^2}\,\tilde{P}_2(x)$

$\mathbf{w = x^2(Ax^2 + Bx + C)}$ – структура частного решения

($\tilde{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ – многочлен II-ой степени с неопределенными коэффициентами).

ПРИМЕР 18.

Найти частное решение ЛНДУ $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$, удовлетворяющее данным начальным условиям: $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$.

<u>Решение:</u>

1. $y'' + 16y = 0$ – соответствующее ЛОДУ.
2. $k^2 + 16 = 0$ – характеристическое уравнение.

$k^2 = -16$, $\mathbf{k = \pm 4i}$ – пара комплексно-сопряженных корней кратности 1.

Им соответствует фундаментальная система решений $y_1 = \cos 4x$, $y_2 = \sin 4x$ (см. таблицу 1).

$\mathbf{y_{oo} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x}$ – общее решение соответствующего ЛОДУ.

3. $f(x) = (34x + 13)e^{-x}$, отсюда $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\mathbf{z = -1}$ (таблица 2), $P_1(x) = 34x + 13$ ($r = 1$)
4. $z = -1$ не совпадает с $k = \pm 4i$, значит (по предпоследнему столбцу таблицы 2)

$\mathbf{w} = \tilde{P}_1(x)$;

$\mathbf{w = (Ax + B)e^{-x}}$ – структура частного решения ЛНДУ ($\tilde{P}_1(x) = Ax + B$)

5. $w' = e^{-x}(A - Ax - B)$;

$w'' = e^{-x}(Ax + B - 2A)$.

6. $w'' + 16w = (34x + 13)e^{-x}$,

$e^{-x}(Ax + B - 2A) + 16(Ax + B)e^{-x} = (34x + 13)e^{-x}$.

7. $e^{-x}(Ax + B - 2A + 16Ax + 16B) = (34x + 13)e^{-x}$.

Разделим все уравнение на $e^{-x} \neq 0$: $Ax + B - 2A + 16Ax + 16B = 34x + 13$.

8. x^1 $A + 16A = 34$,

x^0 $B - 2A + 16B = 13$, или $\begin{cases} 17A = 34, \\ 17B - 2A = 13. \end{cases}$

9. Решая составленную систему, получим $A = 2$, $B = 1$.
10. Подставим найденные значения $A = 2$, $B = 1$ в структуру частного решения $w = (Ax + B)e^{-x}$.

Получим $\mathbf{w = (2x + 1)e^{-x}}$ – частное решение ЛНДУ.

11. $y_{он} = y_{оо} + w$,

$\mathbf{y_{он} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + (2x + 1)e^{-x}}$ – общее решение ЛНДУ (*)

12. $y'_{он} = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x + e^{-x}(1 - 2x)$. (**)
13. Подставим начальные условия $y(0) = -1$ в формулу (*): $-1 = C_1 + 1$.

Подставим начальные условия $y'(0) = 5$ в формулу (**): $5 = 4C_2 + 1$.

14. Решаем систему $\begin{cases} -1 = C_1 + 1, \\ 5 = 4C_2 + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$

15. Подставим найденные значения $C_1 = -2$, $C_2 = 1$ в формулу (*):
$y_{чн} = -2\cos 4x + \sin 4x + (2x + 1)e^{-x}$ – частное решение ЛНДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

2.2.3. Метод вариации произвольных постоянных. (Метод Лагранжа.)

При решении ЛНДУ с постоянными коэффициентами (41) и нестандартной правой частью f(x) будем придерживаться следующей схемы **(схема 3):**

1) Составить ЛОДУ с постоянными коэффициентами, соответствующее данному неоднородному.
2) Найти фундаментальные решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, следуя пунктам 1–4 схемы 1.
3) Найти производные: $y'_1(x)$, $y'_2(x)$, ... , $y'_n(x)$;
$y''_1(x)$, $y''_2(x)$, ... , $y''_n(x)$;
$y_1^{(n-1)}(x), y_2^{(n-1)}(x), \dots, y_n^{(n-1)}(x)$.
4) Составить систему уравнений относительно n неизвестных $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, ... , $C'_n(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \quad (44)$$

5) Найти $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, ... , $C'_n(x)$, решив систему (44).
6) Найти $C_1(x)$, $C_2(x)$, ... , $C_n(x)$, проинтегрировав соответственно $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, ... , $C'_n(x)$.
7) Представить решение уравнения (41) в виде:

$$y_{он} = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \ldots + C_n(x)\, y_n(x), \quad (45)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ – фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения.

Для нахождения частного решения уравнения (41), удовлетворяющее некоторым начальным условиям (задача Коши), можно воспользоваться пунктами 6–9 схемы 1, заменив в ней $y_{оо}$, $y'_{оо}$, $y''_{оо}$, $y'''_{оо}$, ... , $y^{(n-1)}_{оо}$ на $y_{он}$, $y'_{он}$, $y''_{он}$, $y'''_{он}$, ... , $y^{(n-1)}_{он}$ соответственно.

Методом Лагранжа можно решать ЛНДУ не только с постоянными коэффициентами, но и любые уравнения вида (35), если известна фундаментальная система решений, соответствующего однородного уравнения.

Замечание.
Если при нахождении функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, ... , $C_n(x)$, интегрируя соответственно $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, ... , $C'_n(x)$, не добавлять произвольных постоянных C_1, C_2, ... , C_n (пункт 6 схемы 3), то подставляя $C_1(x)$, $C_2(x)$, ... , $C_n(x)$ в формулу (45), получим **частное решение w** уравнения (41), а не общее решение $y_{он}$ этого уравнения.

ПРИМЕР 19.

Найти частное решение уравнения $y'' + y = 1/\cos x$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение:

1. $y'' + y = 0$ – соответствующее однородное уравнение.
2. $k^2 + 1 = 0$ – характеристическое уравнение.

$k^2 = -1$,

$k = \pm i$ – пара комплексно-сопряженных корней кратности 1. Им соответствуют 2 решения (таблица 1): $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

Значит, $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ – фундаментальная система решений.

3) $y'_1(x) = -\sin x$, $y'_2(x) = \cos x$.

4) $$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

5) Сложим уравнения системы, предварительно умножив первое на $\sin x$, а второе на $\cos x$.

Получим: $C'_2(x)\,(\sin^2 x + \cos^2 x) = (1/\cos x)\cos x$,

$$C'_2(x) = 1.$$

Вычтем из первого уравнения системы второе, предварительно умножив первое на $\cos x$, а второе на $\sin x$.

Получим: $C'_1(x)\,(\cos^2 x + \sin^2 x) = -(\sin x/\cos x)$,

$$C'_1(x) = -(\sin x/\cos x).$$

6) $C_1(x) = \int C'_1(x)dx = -\int(\sin x/\cos x)dx = \int d(\cos x) / \cos x = \ln|\cos x| + C_1$.

$C_2(x) = \int C'_2(x)dx = \int 1dx = \int dx = x + C_2$.

7) По формуле (45) составим: $\mathbf{y_{он} = (\ln|\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x.}$ (*)

8) Найдем частное решение, удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

а) $y'_{он} = -\mathrm{tg}\, x \cos x - (\ln|\cos x| + C_1)\sin x + \sin x + (x + C_2)\cos x.$ (**)

б) Подставляя $y(0) = 1$ в общее решение $y_{он}$ (*), получим $1 = C_1$;

подставляя $y'(0) = 0$ в $y'_{он}$ (**), получим $0 = C_2$.

в) Подставим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ в общее решение (*):

$\mathbf{y_{он} = (\ln|\cos x| + 1)\cos x + x\sin x}$ – частное решение, соответствующее начальным условиям.

2.2.4. Принцип суперпозиции решений

Если в уравнении (41) правая часть представляет собой сумму функций, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то нахождение частного решения уравнения (41) можно осуществить следующим образом:

1. Составить уравнения (46, 47), левая часть которых соответствует левой части уравнения (41), а правые части: функция $f_1(x)$ – для первого уравнения, $f_2(x)$ – для второго уравнения.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f_1(x), \quad (46)$$

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f_2(x). \quad (47)$$

2. Найти частное решение $\mathbf{w_1}$ уравнения (46) по схеме 2 или методом Лагранжа.
3. Найти частное решение $\mathbf{w_2}$ уравнения (47) по схеме 2 или методом Лагранжа.
4. Частное решение уравнения (41) имеет вид:

$$\mathbf{w = w_1 + w_2.} \quad (48)$$

ПРИМЕР 20.

Найти общее решение уравнения $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$.

Решение:

1. $y''' + y'' = 0$ – соответствующее однородное уравнение.
2. $k^3 + k^2 = 0$ – характеристическое уравнение.
   $k^2(k + 1) = 0$,
   $k^2 = 0$, $k + 1 = 0$,
   $k = 0$ – корень кратности 2, $k = -1$ – корень кратности 1.
3. По таблице 1 составляем фундаментальную систему решений:
   $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = e^{-x}$.
4. По формуле (37) $\mathbf{y_{oo} = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}}$.
5. Представим $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 6x$, $f_2(x) = e^{-x}$.
6. Правая часть $f_1(x) = 6x$ имеет стандартный вид и соответствует первой строке таблицы 2. Следовательно, $z=0$ ($\alpha = 0$, $\beta = 0$).
   И это совпадает с корнем характеристического уравнения $k = 0$ кратности 2 ($m = 2$).
   Тогда $w_1 = x^2\tilde{P}_1(x)$, где $\tilde{P}_1(x)$ – многочлен I степени с неопределенными коэффициентами (так как $6x$ – многочлен I степени).
   $\tilde{P}_1(x) = Ax + B$ (замечание из схемы 2).
   Значит $\mathbf{w_1 = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2}$.
7. Правая часть $f_2(x) = e^{-x}$ имеет стандартный вид и соответствует второй строке таблицы 2. Следовательно, $z = -1$ ($\alpha = -1$, $\beta = 0$).
   И это совпадает с корнем характеристического уравнения $k = -1$ кратности 1 ($m = 1$).
   Тогда $\mathbf{w_2 = x\tilde{C}e^{-x}}$.
8. Находим w_1', w_1'', w_1''' и подставляем в уравнение $\underline{y''' + y'' = 6x}$.
   $w_1' = 3Ax^2 + 2Bx$, $w_1'' = 6Ax + 2B$, $w_1''' = 6A$.
   $\underline{w_1''' + w_1'' = 6x}$,
   $6A + 6Ax + 2B = 6x$,
   $6Ax + (6A + 2B) = 6x$.
   Собираем коэффициенты при x и x^0 степени:
   $$\begin{array}{c|l} x & 6A = 6, \\ x^0 & 6A + 2B = 0 \end{array}$$
   Отсюда, $A = 1$, $B = -3$.
   Подставляем A и B в формулу для w_1: $\mathbf{w_1 = x^3 - 3x^2}$.
9. Находим w_2', w_2'', w_2''' и подставляем в уравнение $\underline{y''' + y'' = e^{-x}}$.
   $w_2' = \tilde{C}e^{-x} - x\tilde{C}e^{-x} = \tilde{C}e^{-x}(1 - x)$,
   $w_2'' = -\tilde{C}e^{-x}(1 - x) - \tilde{C}e^{-x} = \tilde{C}e^{-x}(x - 2)$,
   $w_2''' = -\tilde{C}e^{-x}(x - 2) + \tilde{C}e^{-x} = \tilde{C}e^{-x}(3 - x)$.
   $\underline{w_2''' + w_2'' = e^{-x}}$,
   $\tilde{C}e^{-x}(3 - x) + \tilde{C}e^{-x}(x - 2) = e^{-x}$,
   Разделим все уравнение на e^{-x}:
   $\tilde{C}(3 - x) + \tilde{C}(x - 2) = 1$,
   $3\tilde{C} - 2\tilde{C} = 1$,
   $\tilde{C} = 1$.
   Подставляем $\tilde{C}$ в формулу для w_2: $\mathbf{w_2 = xe^{-x}}$.
10. По принципу суперпозиции решений $w = w_1 + w_2$, то есть $\mathbf{w = x^3 - 3x^2 + xe^{-x}}$.
11. По формуле (38) $\mathbf{y_{он} = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + x^3 - 3x^2 + xe^{-x}}$.