2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка (ЛНДУ) называют уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x), \qquad (35)$$

где $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x), f(x)$ – заданные в некоторой области D функции.

В формуле (35) положим $f(x) \equiv 0$, получим

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0. \qquad (36)$$

Уравнение (36) называют **линейным однородным** дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n-го порядка, соответствующим уравнению (35).

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются **линейно зависимыми** в интервале (a; b), если существуют постоянные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равные нулю одновременно, такие, что $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0$.

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются **линейно независимыми** в интервале (a; b), если из равенства $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0$ всегда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Для определения линейной зависимости или линейной независимости функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ в интервале (a; b) можно использовать **определитель Вронского (вронскиан)**, который имеет вид:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ **линейно независимы** в интервале (a; b) тогда и только тогда, когда $W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$

Фундаментальной системой решений однородного уравнения (36) называют совокупность n линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (36).

Общее решение линейного **однородного** уравнения (36) имеет вид:

$$\mathbf{y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)}, \qquad (37)$$

где $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - любая фундаментальная система решений уравнения (36), $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные.

Общее решение линейного **неоднородного** уравнения (35) имеет вид:

$$\mathbf{y_{он} = y_{oo} + w}, \qquad (38)$$

где y_{oo} – общее решение соответствующего ему однородного уравнения (36), w – одно из частных решений уравнения (35).

ПРИМЕР 13.

Известна фундаментальная система решений $y_1=e^{-3x}$, $y_2=xe^{-3x}$ однородного уравнения $y''+6y'+9y=0$. Найти общее решение этого уравнения.

Решение:

По формуле (37) имеем $y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,

$$y_{oo} = C_1e^{-3x} + C_2\cdot xe^{-3x},$$
$$y_{oo} = e^{-3x}(C_1 + xC_2) \text{ – общее решение.}$$

ПРИМЕР 14.

Записать общее решение неоднородного уравнения $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x + 1$, если одним из его частных решений является функция $w=x+1$, а общее решение соответствующего ему однородного уравнения имеет вид $y_{oo} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.

Решение:

По формуле (38) $\quad y_{он} = y_{oo} + w,$

$$y_{он} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + x + 1 \text{ - общее решение.}$$

2.2.1. Линейные однородные ДУВП с постоянными коэффициентами.

Положим в уравнении (36) $a_1(x) = p_1$, $a_2(x) = p_2$, ... , $a_n(x) = p_n$, где p_i - любые действительные числа ($i = \overline{1,n}$).

Получаем уравнение: $\quad \mathbf{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0}$. $\quad$ (39)

Уравнение (39) называют **линейным однородным** дифференциальным уравнением n-го порядка **с постоянными коэффициентами**.

Его общее решение находится по формуле (37), если известна система его фундаментальных решений.

Заменив в уравнении (39) функцию y и ее производные $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, ... , y' соответствующими степенными функциями следующим образом $y = 1$, $y^{(n)} = k^n$, $y^{(n-1)} = k^{n-1}$, $y^{(n-2)} = k^{n-2}$,..., $y' = k$, получим алгебраическое уравнение

$$\mathbf{k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + ... + p_{n-1} k + p_n = 0}, \qquad (40)$$

которое называется **характеристическим уравнением** для уравнения (39).

Решая это уравнение, получаем ровно n корней. Каждому корню соответствует одно из фундаментальных решений уравнения (39).

В таблице 1 приведены фундаментальные решения, соответствующие различным корням характеристического уравнения. Наряду с общим случаем (последняя строка таблицы) рассмотрены всевозможные частные случаи.

Таблица 1.

Корни характеристического уравнения		Составление фундаментальных решений, соответствующих корням характеристического уравнения.
1.	$k = 0$ – простой корень (кратности 1)	$y = 1$ (одно решение)
2.	$k = 0$ – корень кратности m	$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ y_4 = x^3,\ \ldots,\ y_m = x^{m-1}$ (ровно m решений)
3.	$k = \alpha$ – простой действительный корень (кратности 1)	$y = e^{\alpha x}$ (одно решение)
4.	$k = \alpha$ – действительный корень кратности m	$y_1 = e^{\alpha x},\ y_2 = xe^{\alpha x},\ y_3 = x^2e^{\alpha x},\ y_4 = x^3e^{\alpha x},\ \ldots,\ y_m = x^{m-1}e^{\alpha x}.$ (ровно m решений)
5.	$k = \pm\beta i$ – пара комплексно-сопряженных корней (кратности 1)	$y_1 = \cos\beta x,\ \ y_2 = \sin\beta x.$ (два решения)
6.	$k = \pm\beta i$ – пара комплексно-сопряженных корней кратности m.	$y_1 = \cos\beta x,\quad y_2 = \sin\beta x,$ $y_3 = x\cos\beta x,\quad y_4 = x\sin\beta x,$ $y_5 = x^2\cos\beta x,\quad y_6 = x^2\sin\beta x,$ .... $y_{2m-1} = x^{m-1}\cos\beta x,\quad y_{2m} = x^{m-1}\sin\beta x.$ (ровно 2m решений)
7.	$k = \alpha \pm \beta i$ – пара комплексно-сопряженных корней (кратности 1)	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$ (два решения)
8.	$k = \alpha \pm \beta i$ – пара комплексно-сопряженных корней кратности m.	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$ $y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,$ $y_5 = x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_6 = x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,$ .... $y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$ (ровно 2m решений)

Решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами (39) обычно осуществляется по следующей схеме (схема 1):

1) Составить соответствующее данному дифференциальному уравнению характеристическое уравнение (формула 40).
2) Найти корни характеристического уравнения.
3) Для каждого корня (с учетом его кратности) найти по таблице 1 соответствующие ему решения.
4) Объединив полученные решения, получить фундаментальную систему решений.
5) Найти общее решение дифференциального уравнения y_{oo} по формуле (37).

Если по условию задачи требуется найти частное решение уравнения, удовлетворяющее некоторым начальным условиям (решить задачу Коши), то продолжим схему, добавив в нее пункты:

6) Найти производные $y'_{oo},\ y''_{oo},\ y'''_{oo},\ \ldots,\ y^{(n-1)}_{oo}$ полученного общего решения y_{oo} (n – порядок дифференциального уравнения).
7) Подставить начальные условия задачи в найденное общее решение y_{oo} и его производные $y'_{oo},\ y''_{oo},\ y'''_{oo},\ \ldots,\ y^{(n-1)}_{oo}$. Получим систему n линейных уравнений с n неизвестными $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$.
8) Решая полученную систему, найти постоянные $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$.

9) Найденные значения C_1, C_2, C_3, ... , C_n подставить в общее решение $y_{оо}$ дифференциального уравнения – получим частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

ПРИМЕР 15.
Найти общее решение уравнения $y^{VII} + 8y^{V} + 16y''' = 0$.
Решение:
1. $k^7 + 8k^5 + 16k^3 = 0$ – характеристическое уравнение.
2. $k^3(k^4 + 8k^2 + 16) = 0$,
   $k^3(k^2 + 4)^2 = 0$,
   $k^3 = 0$,
   $k = 0$ – корень кратности 3,
   $(k^2 + 4)^2 = 0$,
   $k^2 + 4 = 0$,
   $k^2 = -4$,
   $k = \pm 2i$ – пара комплексно-сопряженных корней кратности 2.
3. Корню $k = 0$ (кратности 3) соответствуют три решения: $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$.
   Паре комплексно-сопряженных корней $k = \pm 2i$ (кратности 2) соответствуют 4 решения: $y_4 = \cos 2x$, $y_5 = \sin 2x$, $y_6 = x\cos 2x$, $y_7 = x\sin 2x$.
4. $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = \cos 2x$, $y_5 = \sin 2x$, $y_6 = x\cos 2x$, $y_7 = x\sin 2x$ – фундаментальная система решений.
5. $y_{оо} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x + C_6 x\cos 2x + C_7 x\sin 2x$ – общее решение.

ПРИМЕР 16.
Найти частное решение ЛОДУ $y''' - 7y'' + 6y' = 0$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 30$.
Решение:
1. $k^3 - 7k^2 + 6k = 0$ – характеристическое уравнение.
2. $k(k^2 - 7k + 6) = 0$,
   $k = 0$ – корень кратности 1,
   $k^2 - 7k + 6 = 0$,
   $k = 1$, $k = 6$ – простые корни (кратности 1).
3. Корню $k = 0$ (кратности 1) соответствует одно решение: $y_1 = 1$.
   Корню $k = 1$ (кратности 1) соответствует одно решение: $y_2 = e^x$.
   Корню $k = 6$ (кратности 1) соответствует одно решение: $y_3 = e^{6x}$.
4. $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{6x}$ – фундаментальная система решений.
5. $y_{оо} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{6x}$ – общее решение. (*)
6. $y'_{оо} = C_2 e^x + 6C_3 e^{6x}$, (**)
   $y''_{оо} = C_2 e^x + 36C_3 e^{6x}$. (***)
7. Подставляя $y(0) = 0$ в общее решение (*), получим $0 = C_1 + C_2 + C_3$;
   подставляя $y'(0) = 0$ в (**), получим $0 = C_2 + 6C_3$;
   подставляя $y''(0) = 30$ в (***), получим $30 = C_2 + 36C_3$.
8. $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_2 + 6C_3 = 0, \\ C_2 + 36C_3 = 30, \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = -C_2 - C_3, \\ C_2 = -6C_3, \\ 30C_3 = 30, \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = 5, \\ C_2 = -6, \\ C_3 = 1. \end{cases}$

9. Подставим $C_1 = 5$, $C_2 = -6$, $C_3 = 1$ в общее решение (*):
   $y_{чо} = 5 - 6e^x + e^{6x}$ – частное решение, соответствующее начальным условиям.

Замечание 1.

В случае ЛОДУ второго порядка $\mathbf{y'' + p_1 y' + p_2 y = 0}$ для нахождения фундаментальной системы решений y_1, y_2 и общего решения $y_{оо}$ вместо **Таблицы 1** удобно воспользоваться следующей таблицей:

Таблица 1.1.

D – дискриминант соответствующего характеристического уравнения.	**Корни характеристического уравнения**	**Фундаментальная система решений: y_1 и y_2**	**Общее решение $y_{оо}$**
D > 0	Два различных простых (кратности 1) действительных корня: $k_1 = \alpha_1$, $k_2 = \alpha_2$	$y_1 = e^{\alpha_1 x}$, $y_2 = e^{\alpha_2 x}$	$y_{оо} = C_1\ e^{\alpha_1 x} +$ $+ C_2\ e^{\alpha_2 x}$
D = 0	Один действительный корень кратности 2: $k = \alpha$	$y_1 = e^{\alpha x}$, $y_2 = x\, e^{\alpha x}$	$y_{оо} = C_1\, e^{\alpha x} +$ $+ C_2\, x\, e^{\alpha x}$
D < 0	Два комплексно-сопряженных корня кратности 1: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y_{оо} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x +$ $+ C_2 \sin \beta x)$