2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ (ДУВП).

Общий вид ДУ *n*-го порядка: $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$. (24)

Если разрешить это уравнение относительно наивысшей производной $y^{(n)}$, то получим:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}). \qquad (25)$$

ТЕОРЕМА (КОШИ).

Если правая часть уравнения (25) является непрерывной функцией в окрестности значений x_0, y_0, y'_0, y''_0, ... , $y_0^{(n-1)}$, то уравнение (25) имеет решение $y = y(x)$ в некотором интервале (a, b), содержащем x_0, такое, что $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$, ... , $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Если в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то решение $y = y(x)$ – единственное.

Общим решением ДУ n-го порядка называется функция вида

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

зависящая от x и от n существенных параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$, подстановка которой и ее производных по x в уравнение (24) превращает его в верное тождество.

Общее решение, полученное в неявном виде: $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ называется **общим интегралом** ДУ

Параметры (произвольные постоянные) $C_1, C_2, \dots, C_n$ называются **существенными** или **независимыми**, если их число нельзя уменьшить введением новых параметров.

Например, функция $y = C_1 \cdot x + C_2 + C_3$ содержит три параметра, но, так как сумма двух произвольных постоянных есть произвольная постоянная, то обозначим $C_2 + C_3$ через C_4, тогда $y = C_1 \cdot x + C_4$. Следовательно рассматриваемая функция имеет только два независимых параметра C_1 и C_4.

Частным решением ДУ n-го порядка называется решение, полученное из общего решения путем фиксирования произвольных постоянных: $\mathbf{y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)}$, где $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ – некоторые числа.

Аналогично определяется **частный интеграл**: $\mathbf{\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) = 0}$.

ЗАДАЧА КОШИ: Найти решение $y = y(x)$ **(** или интеграл $\Phi(x, y) = 0$ **)** ДУ n-го порядка, удовлетворяющее **начальным условиям**

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

$$\big(\text{ или } \Phi(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}) = 0\ \big),$$

где x_0, y_0, y'_0, y''_0, ... , $y_0^{(n-1)}$ – заданные числа (**начальные данные).**

2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА.

Случай 1.

Если правая часть уравнения (25) зависит только от x, то получаем ДУ вида

$$\mathbf{y^{(n)} = f(x).} \qquad (26)$$

Общее решение находим n-кратным интегрированием:

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \int \ldots \int}_{n\ \text{раз}} f(x)dx = \varphi_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2\,x^{n-2} + \ldots + C_n. \qquad (27)$$

ПРИМЕР 9.

Решить уравнение $y''' = x^2 - \sin x$.

<u>Решение:</u> $y'' = \int(x^2 - \sin x)dx = x^3/3 + \cos x + C_1$;

$y' = \int(x^3/3 + \cos x + C_1)dx = x^4/12 + \sin x + C_1 \cdot x + C_2$;

$y = \int(x^4/12 + \sin x + C_1 \cdot x + C_2)dx = x^5/60 - \cos x + C_1 \cdot x^2/2 + C_2 \cdot x + C_3$ - общее решение.

Случай 2.

ДУ не содержит искомой функции и ее производных до (k − 1)-го порядка включительно ($1 \le k \le n$):

$$\mathbf{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0}. \qquad (28)$$

Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных данного уравнения по формуле:

$$\mathbf{z(x) = y^{(k)}}. \qquad (29)$$

Учитывая, что $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+2)} = z''$, ... , $y^{(n)} = z^{(n-k)}$, получаем уравнение вида

$$\mathbf{F(x, z, z', z'', y^{(k+2)}, \ldots, z^{(n-k)}) = 0.} \qquad (30)$$

ПРИМЕР 10.

Найти частное решение уравнения $(\sin x)y'' - (\cos x)y' = 0$, удовлетворяющее условиям $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = 1$.

<u>Решение</u>:

1) Пусть $y' = z$, тогда $y'' = z'$.

Получили: $(\sin x)z' - (\cos x)z = 0$ – ДУ I-го порядка с разделяющимися переменными.

Заменим $z' = \dfrac{dz}{dx}$: $(\sin x)\dfrac{dz}{dx} - (\cos x)z = 0$.

Разделим переменные: $dz/z = (\cos x)dx/\sin x$.

Интегрируем: $\int dz/z = \int(\cos x)dx/\sin x$,

$\ln z = \ln|\sin x| + \ln C_1$,

$z = C_1 \cdot \sin x$.

2) Учитывая, что $z = y'$, получим ДУ I порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = C_1 \cdot \sin x \qquad (*)$$

Заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$: $\dfrac{dy}{dx} = C_1 \cdot \sin x$.

Разделим переменные: $dy = C_1 \cdot \sin x \cdot dx$.

Интегрируем: $\int dy = \int C_1 \cdot \sin x \cdot dx$,

$y = -C_1 \cdot \cos x + C_2$ – общее решение. (**)

3) Для того, чтобы найти параметры C_1 и C_2, подставим начальные условия $y'(\pi/2) = 1$, $y(\pi/2) = 0$, в уравнения (*) и (**):

$$\begin{cases} 1 = C_1 \sin\ (\pi/2), \\ 0 = -C_1 \cos\ (\pi/2) + C_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 = C_1 \cdot 1, \\ 0 = -C_1 \cdot 0 + C_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 = C_1, \\ 0 = C_2. \end{cases}$$

Найденные значения $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$ подставим в общее решение (**):

$y = -\cos x$ – частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

Случай 3.

ДУ не содержит явно аргумент x:

$$\mathbf{F(y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0}. \qquad (31)$$

Порядок уравнения (31) можно понизить на единицу, введя новую функцию

$$\mathbf{z(y) = y'} \qquad (32)$$

В этом случае y'', y''', ... , $y^{(n)}$ выражаются через производные функции z(y) по правилу дифференцирования сложной функции: $\mathbf{y''= zz'}$, $\mathbf{y'''= z(z')^2 + z^2z''}$ и т. д.

Уравнение (31) примет вид:

$$\mathbf{F(y, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0}. \qquad (33)$$

ПРИМЕР 11.

Найти решение уравнения $y^3y''= -1$, которое удовлетворяет заданным условиям: $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

<u>Решение</u>: $y'= z(y)$, $y''= zz'$.

1) Подставив $y''= zz'$ в исходное уравнение, получим: $y^3zz'= -1$ – ДУ I порядка с разделяющимися переменными.

Заменим $z'= \dfrac{dz}{dy}$: $\quad y^3z\,\dfrac{dz}{dy} = -1.$

Разделим переменные: $\quad zdz = -dy/y^3$.

Интегрируем: $\quad \int zdz = -\int dy/y^3$,

$z^2/2 = 1/(2y^2) + C_1$,

$z = \pm\sqrt{\dfrac{1}{y^2} + 2C_1}$.

Учитывая, что $z = y'$, получим ДУ I порядка с разделяющимися коэффициентами:

$$y'= \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1} \qquad (*)$$

2) Для нахождения параметра C_1 начальные условия $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ подставим в уравнение (*): $\quad 0 = \pm\sqrt{1 + 2C_1}$,

$1 + 2C_1 = 0$,

$C_1 = -1/2$.

Полученное значение $C_1 = -1/2$ подставим в (*):

$$y'= \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1},$$

$$y'= \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Заменим $y'= \dfrac{dy}{dx}$: $\quad \dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Разделим переменные: $\pm\dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$.

Интегрируем: $$\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\int dx,$$

$$\mp\frac{1}{2}\int(1-y^2)^{-1/2}d(1-y^2)=\int dx,$$

$$\mp(1-y^2)^{1/2}=x+C_2,$$

$$\mp\sqrt{1-y^2}=x+C_2. \qquad (**)$$

3) Для нахождения параметра C_2 подставим начальное условие $y(1) = 1$ в уравнение (**):

$$\mp\sqrt{1-1^2}=1+C_2:$$

$$0 = 1 + C_2,$$

$$C_2 = -1.$$

Полученное значение $C_2 = -1$ подставим в (**): $\mp\sqrt{1-y^2}=x-1$, или

$x=1\mp\sqrt{1-y^2}$ – частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.