

# 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ I ПОРЯДКА.

**Общий вид** ДУ I порядка:  $F(x, y, y') = 0$ . (1)

Если разрешить это уравнение относительно  $y'$ , то получим ДУ в нормальной форме:

$$y' = f(x, y). \quad (2)$$

Иногда ДУ I порядка удобно записывать в так называемой **дифференциальной форме**:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (3)$$

**ТЕОРЕМА (КОШИ).**

Если правая часть  $f(x, y)$  ДУ (2) непрерывна в точке  $M(x_0, y_0)$  и в ее окрестности, то существует решение  $y = y(x)$  уравнения (2), такое, что  $y(x_0) = y_0$ . Если непрерывна также частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  данной функции, то это решение единственно.

Любое ДУ в области, удовлетворяющей теореме Коши, имеет бесчисленное множество решений. Для описания этого множества решений вводится понятие общего решения.

**Общим решением** ДУ называется функция вида  $y = \varphi(x, C)$  ( $C$  - произвольная постоянная), удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) она является решением ДУ при любых значениях  $C$ ;
- 2) для любых начальных данных  $x_0, y_0$ , при которых ДУ имеет решение, можно указать такое значение  $C$ , что будет выполнено начальное условие

$$\varphi(x_0, C) = y_0.$$

Общее решение, полученное в неявном виде:  $\Phi(x, y, C) = 0$  называется **общим интегралом** ДУ

**График** общего решения – семейство интегральных кривых.

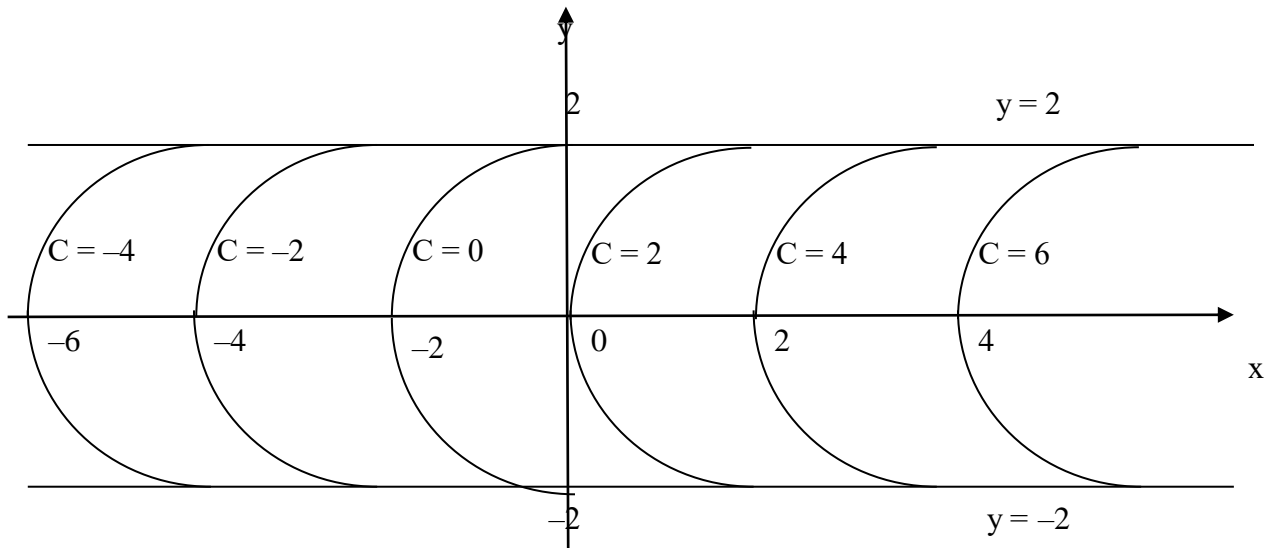
Всякое решение (интеграл), получающееся из общего решения (общего интеграла) при фиксированном значении  $C = C_0$ , называется **частным решением (частным интегралом)**.

**Особым решением (особым интегралом)** называется решение, которое невозможно получить из общего решения (общего интеграла) ни при каких значениях произвольной постоянной  $C$ .

В любой точке особого решения нарушаются какие-либо условия теоремы Коши.

Графиком особого решения является огибающая семейства интегральных кривых общего решения.

Например, на рис. 1 изображены интегральные кривые  $(x - C)^2 + y^2 = 4$  ( $x \leq C$ ) общего решения уравнения  $yy' = \sqrt{4 - y^2}$ , а также огибающие этих решений – линии  $y = 2$  и  $y = -2$ , изображающие особые решения данного дифференциального уравнения.



**ЗАДАЧА КОШИ:** Найти решение  $y = y(x)$  (интеграл  $\Phi(x, y) = 0$ ) ДУ, удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$  ( $\Phi(x_0, y_0) = 0$ ).

Задача Коши в геометрической постановке: выбрать из всех интегральных кривых ту кривую  $y = y(x)$ , которая проходит через заданную точку  $M(x_0, y_0)$ , т. е.  $y(x_0) = y_0$ .

### 1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

Уравнение вида  $P(x)dx + Q(y)dy = 0$  (4) называется **ДУ с разделенными переменными**.

Его общий интеграл:  $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$ , (5)  
где  $C$  – произвольная постоянная.

Уравнение вида  $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$  (6)  
или  $\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$ , (7)

а также уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований приводятся к уравнениям (4) или (5), называются **уравнениями с разделяющимися переменными**.

Приведем уравнение (6) к виду (4). Для этого разделим обе части уравнения (6) на  $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ :

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0. \quad (8)$$

Общий интеграл уравнения (8):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C. \quad (9)$$

Приведем уравнение (7) к виду (4). Для этого разделим обе части уравнения (7) на  $f_2(y) \neq 0$  и умножим на  $dx$ :

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \quad (10)$$

Общий интеграл уравнения (10):

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C. \quad (11)$$

## ПРИМЕР 1

Найти общее решение уравнения  $xy' = y^2 + 1$ .

Решение:

1. Заменяем  $y'$  на  $\frac{dy}{dx}$ :  $x \frac{dy}{dx} = y^2 + 1$ .
2. Разделим переменные: домножим обе части уравнения на  $dx$  и разделим на  $x(y^2 + 1)$ , положив  $x \neq 0$ :  $\frac{dy}{(y^2 + 1)} = \frac{dx}{x}$ .
3. Проинтегрируем:  $\int \frac{dy}{(y^2 + 1)} = \int \frac{dx}{x}$ ,  
 $\operatorname{arctg} y = \ln|x| + C$ .
4. Представим  $C = \ln|C_1|$ :  $\operatorname{arctg} y = \ln|x| + \ln|C_1|$ ,  
 $\operatorname{arctg} y = \ln|xC_1|$ ,  
 $y = \operatorname{tg}(\ln|xC_1|)$  – общее решение.

Замечание: Подставим  $x=0$  в исходное уравнение. Получим  $0=y^2+1$ . Следовательно,  $x=0$  не является решением уравнения.

## ПРИМЕР 2

Найти частное решение (частный интеграл) уравнения  $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0$  при условии  $y(1) = 1$ .

Решение:

1. Разделим переменные:
  - а) Вынесем за скобки общий множитель:  
 $x(1 + y)dy + y(1 - x)dx = 0$ .
  - б) Разделим все уравнение на  $xy$ , положив  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ :  
 $(1+y)/y dy + (1-x)/x dx = 0$ .
2. Проинтегрируем:  $\int (1+y)/y dy + \int (1-x)/x dx = C$ ,  
 $\int dy/y + \int dy + \int dx/x - \int dx = C$ ,  
 $\ln|y| + y + \ln|x| - x = C$ ,  
 $\ln|xy| + (y - x) = C$ .
3. Представим  $C = \ln|C_1|$ ,  $y - x = \ln e^{y-x}$ :  
 $\ln|xy| + \ln e^{y-x} = \ln|C_1|$ ,  
 $\ln|xye^{y-x}| = \ln|C_1|$ ,  
 $xye^{y-x} = C_1$  – общий интеграл.
4. Для нахождения  $C_1$  воспользуемся начальным условием  $y(1) = 1$ :  
 $1 \cdot 1 \cdot e^{1-1} = C_1$ ,  
 $C_1 = 1$ .
5. Подставим  $C_1 = 1$  в общий интеграл:  $xye^{y-x} = 1$  – частный интеграл, соответствующий заданному начальному условию  $y(1) = 1$ .

Замечание: При  $x = 0 \Rightarrow dx=0$ . Подставим это в исходное уравнение:

$$(0 + 0 \cdot y)dy + (y - 0 \cdot y) \cdot 0 = 0,$$

$$0 = 0.$$

При  $y = 0 \Rightarrow dy = 0$ . Подставим это в исходное уравнение:

$$(x + x \cdot 0) \cdot 0 + (0 - x \cdot 0)dx = 0,$$

$$0 = 0.$$

Следовательно, функции  $x = 0$  и  $y = 0$  являются решениями исходного уравнения. Так как  $x = 0$  и  $y = 0$  могут быть получены из общего интеграла при  $C_1 = 0$ , то  $x = 0$  и  $y = 0$  – частные решения.

## 1.2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функция  $f(x, y)$  называется **однородной функцией степени  $n$**  относительно аргументов  $x$  и  $y$ , если для любого  $t$  справедливо равенство:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Например,  $f(x, y) = 3x^2 - 5xy + 8y^2$  – однородная функция II степени, так как

$$f(tx, ty) = 3(tx)^2 - 5(tx)(ty) + 8(ty)^2,$$

$$f(tx, ty) = 3t^2 x^2 - 5t^2 xy + 8t^2 y^2,$$

$$f(tx, ty) = t^2(3x^2 - 5xy + 8y^2),$$

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y).$$

ДУ вида  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  (12)

называется **однородным** относительно переменных  $x$  и  $y$ , если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – однородные функции одной степени  $n$ , т. е.  $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$  и  $Q(tx, ty) = t^n Q(x, y)$ .

Д.у. вида  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  (13)

называется однородным относительно переменных  $x$  и  $y$ , если  $f(x, y)$  – однородная функция нулевой степени, т. е.  $f(tx, ty) = f(x, y)$ .

Положим  $t = 1/x$ , тогда  $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f(tx, ty) = f(x/x, y/x) = f(1, y/x) = g(y/x)$ .

Однородные уравнения решаются при помощи подстановки  $y/x = u(x)$ , отсюда  $y = xu$ ,  $y' = x'u + xu' = u + xu'$ ,  $dy = udx + xdu$ . (14)

### ПРИМЕР 3.

Найти общее решение уравнения  $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$ .

Решение:

1.  $(\sqrt{x^2 + y^2} + y)dx - xdy = 0;$

$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y$  – однородная функция степени 1;

$Q(x, y) = -x$  – однородная функция степени 1.

Следовательно, данное уравнение является однородным д.у.

2. Воспользуемся подстановкой (14):

$$(\sqrt{x^2 + (xu)^2} + xu)dx - x(udx + xdu) = 0,$$

$$(\sqrt{x^2(1 + u^2)} + xu)dx - x(udx + xdu) = 0,$$

$$(x\sqrt{1 + u^2} + xu)dx - x(udx + xdu) = 0.$$

3. Разделим все уравнение на  $x \neq 0$ :

$$(\sqrt{1 + u^2} + u)dx - udx - xdu = 0,$$

$$(\sqrt{1 + u^2} + u - u)dx - xdu = 0,$$

$$xdu = \sqrt{1+u^2} dx.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

4. Разделим переменные:  $du/\sqrt{1+u^2} = dx/x$ .
5. Проинтегрируем:  $\int du/\sqrt{1+u^2} = \int dx/x$ ,  
 $\ln|u + \sqrt{1+u^2}| = \ln|x| + \ln|C_1|$ , где  $C = \ln|C_1|$ ,  
 $x C_1 = u + \sqrt{1+u^2}$ .
6. Вернемся к переменной  $y$  по формуле  $u = y/x$ :  
 $x C_1 = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ ,  
 $x^2 C_1 = y + \sqrt{x^2 + y^2}$  – общий интеграл.

### Замечание 1.

1. Если каждое слагаемое ДУ содержит одночлен одной и той же степени  $n$ , то можно предположить, что данное уравнение однородное.

Например, в ДУ  $2x^2y' = x^2 + xy$ :  $2x^2y'$  – содержит одночлен 2 степени;  
 $x^2$  – одночлен 2 степени;  
 $xy$  – одночлен 2 степени ( $1+1=2$ ).

Предполагаем, что данное уравнение однородное.

#### Проверяем.

Выразим  $y'$ :  $y' = (x^2 + xy)/(2x^2)$ .

Значит  $f(x, y) = (x^2 + xy)/(2x^2)$ .

Тогда  $f(tx, ty) = ((tx)^2 + (tx)(ty))/(2(tx)^2) = (t^2x^2 + t^2xy)/(2t^2x^2) = t^2(x^2 + xy)/(2t^2x^2) = (x^2 + xy)/(2x^2) = f(x, y)$ .

Следовательно, данное д.у. – однородное.

### Замечание 2.

Если в ДУ встречается частное  $y/x$  (или  $x/y$ ), то можно предположить, что данное ДУ однородное.

Например, ДУ  $xy' = x \sin(y/x) + y$  содержит частное  $y/x$ .

Предполагаем, что оно однородное.

#### Проверяем.

Выразим  $y'$ :  $y' = \sin(y/x) + y/x$ .

Значит  $f(x, y) = \sin(y/x) + y/x$ .

Тогда  $f(tx, ty) = \sin(ty/(tx)) + ty/(tx) = \sin(y/x) + y/x = f(x, y)$ .

Следовательно, данное д.у. – однородное.

### Замечание 3.

Если слагаемые однородного ДУ содержат одночлены степени  $n$ , то удобно разделить это уравнение почленно на  $x^n$ , а затем использовать подстановку (14).

Например, каждое слагаемое ДУ  $3x^2y' = y^2 + 9xy + 9x^2$  содержит одночлен 2 степени. Разделим почленно это уравнение на  $x^2$ :

$$3y' = y^2/x^2 + 9y/x + 9.$$

Используя подстановку (14) :  $y/x = u$ ,  $y' = xu' + u$ , получим

$$3(xu' + u) = u^2 + 9u + 9.$$

### 1.3. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ.

$$\text{Уравнение вида} \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (15)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции  $\Phi(x, y)$ , т. е.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = d\Phi(x, y).$$

$$\text{Для этого необходимо и достаточно, чтобы} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (16)$$

В этом случае  $\Phi(x, y) = C$  является общим интегралом данного уравнения и находится по одной из следующих формул:

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C, \quad (17.1)$$

$$\int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C, \quad (17.2)$$

где точка  $M(x_0, y_0)$  принадлежит области  $D$  определения функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  и существования решения уравнения (15).

#### ПРИМЕР 4.

Найти общий интеграл ДУ  $y' = (y - 3x^2)/(4y - x)$

Решение:

1. Заменяем  $y'$  на  $\frac{dy}{dx}$  и преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (y - 3x^2)/(4y - x), \\ (4y - x)dy &= (y - 3x^2)dx, \\ (y - 3x^2)dx - (4y - x)dy &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $P(x, y) = y - 3x^2$ ,  $Q(x, y) = -(4y - x) = x - 4y$ .

2. Проверим условие (16):  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ , т. е.  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

3. Так как условие выполняется, выберем точку  $M(1, 0)$  области  $D$  ( $x_0 = 1, y_0 = 0$ ).

4. Составим  $P(x, y_0) = P(x, 0) = 0 - 3x^2 = -3x^2$ .

5. Применим формулу (17.1) (можно воспользоваться и формулой (17.2), но для этого нужно было предварительно составить  $Q(x_0, y)$ ):

$$\begin{aligned} \int_1^x (-3x^2)dx + \int_0^y (x - 4y)dy &= C, \\ -x^3 \Big|_1^x + (xy - 2y^2) \Big|_0^y &= C, \\ -x + 1 + xy - 2y^2 &= C, \\ x - xy + 2y^2 &= 1 - C. \end{aligned}$$

5. Обозначим  $1 - C = C_1$ , тогда  $x - xy + 2y^2 = C_1$  – общий интеграл.

**Замечание.**

Выбираем точку  $M(x_0, y_0)$  произвольно таким образом, чтобы она входила в область определения функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , и при подстановке  $x_0$  и  $y_0$  вместо  $x$  и  $y$  соответственно функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  одновременно в нуль не обращались.

**Схема нахождения общего решения ДУ в полных дифференциалах.**

1. Выделить функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ .
2. Найти частные производные  $\partial P/\partial y$  и  $\partial Q/\partial x$ . Проверить условие (16).
3. Выбрать точку  $M(x_0, y_0)$ .
4. Составить  $P(x, y_0)$  или  $Q(x_0, y)$ .
5. Применить одну из формул (17.1) или (17.2).
6. Все постоянные перенести в правую часть уравнения и полученное в правой части выражение обозначить  $C_1$ .

**1.4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Уравнение вида  $y' + P(x)y = Q(x)$ , (18)

где  $P(x) \neq 0$  и  $Q(x) \neq 0$  называется **неоднородным линейным дифференциальным уравнением**.

**Общее решение** уравнения (18) находится по формуле:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left( \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right), \quad (19)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

При нахождении интегралов, входящих в формулу (19) произвольные постоянные считают равными нулю.

Для того, чтобы выполнялись условия теоремы Коши существования и единственности решения, функции  $P(x)$  и  $Q(x)$  должны быть непрерывными в некоторой области.

Если в уравнении (18) функция  $Q(x) \equiv 0$ , то уравнение принимает вид

$$y' + P(x)y = 0. \quad (18.1)$$

и называется **однородным линейным дифференциальным уравнением**.

Уравнение (18.1) является уравнением с разделяющимися переменными. Его общий

интеграл находится по формуле:  $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x) dx$ .

Если в уравнении (18) функция  $P(x) \equiv 0$ , то уравнение принимает вид  $y' = Q(x)$ , и является уравнением с разделяющимися переменными. Его общее решение

$$y = \int Q(x) dx.$$

**ПРИМЕР 5.**

Решить неоднородное линейное уравнение  $y' - \frac{2y}{x} = x^3$ .

Решение:

1. Данное ДУ является уже приведенным к виду (18).

$$2. \quad P(x) = -\frac{2}{x}; \quad Q(x) = x^3.$$

$$3. \quad \int P(x) dx = -\int \frac{2}{x} dx = -2 \ln|x|.$$

$$4. \quad \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int x^3 e^{-2 \ln|x|} dx = \int x^3 \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

5. Подставим найденные интегралы в формулу (19):

$$y = e^{2 \ln|x|} \left( \frac{x^2}{2} + C \right),$$

$$y = x^2 \left( \frac{x^2}{2} + C \right) - \text{общее решение.}$$

### Замечание.

Иногда ДУ является линейным относительно  $x$  как функции  $y$ , в этом случае оно может быть приведено к виду

$$x' + p(y) x = q(y), \text{ то есть } \frac{dx}{dy} + p(y) x = q(y), \quad (18.2)$$

где  $x' = 1/y'$  (и наоборот,  $y' = 1/x'$ )

$$\text{Его общее решение: } x = e^{-\int p(y) dy} \left( \int q(y) e^{\int p(y) dy} dy + C \right). \quad (19.1)$$

### ПРИМЕР 6.

Найти частное решение дифференциального уравнения  $(2e^y - x) y' = 1$ , если  $y(0) = 0$ .

Решение:

1. Приведем ДУ к виду (18.2):

$$\text{а) Представим } y' \text{ как } \frac{dy}{dx}: \quad (2e^y - x) dy/dx = 1.$$

$$\text{б) Умножим все уравнение на } \frac{dx}{dy}: \quad 2e^y - x = dx/dy,$$

$$dx/dy + x = 2e^y.$$

$$2. \quad p(y) = 1, \quad q(y) = 2e^y.$$

$$3. \quad \int p(y) dy = \int dy = y,$$

$$4. \quad \int q(y) e^{\int p(y) dy} dy = \int 2e^y e^y dy = \int 2e^{2y} dy = \int e^{2y} d(2y) = e^{2y}.$$

5. Воспользуемся формулой (19.1):  $x = e^{-y}(e^{2y} + C)$  – общее решение.

6. Воспользуемся условием  $y(0) = 0$ , чтобы найти постоянную  $C$ :

$$0 = e^0(e^0 + C),$$

$$0 = 1 + C,$$

$$C = -1.$$

7. Подставим  $C = -1$  в найденное общее решение:  $x = e^{-y}(e^{2y} - 1)$ , или, раскрыв скобки,  
 $x = e^y - e^{-y}$  - частное решение.

### Схема нахождения общего решения линейного неоднородного ДУ

1. Привести уравнение к виду (18) или (18.2).

Если ДУ приведено к виду (18), то

2. Выписать функции  $P(x)$  и  $Q(x)$ .

3. Вычислить  $\int P(x) dx$ .

4. Вычислить  $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx$ .

5. Подставить найденные интегралы в

Если ДУ приведено к виду (18.2), то

2. Выписать функции  $p(y)$  и  $q(y)$ .

3. Вычислить  $\int p(y) dy$ .

4. Вычислить  $\int q(y) e^{\int p(y) dy} dy$ .

5. Подставить найденные интегралы в

формулу (19).

| формулу (19.1).

**МЕТОД БЕРНУЛЛИ решения линейного уравнения (18) ( или (18.2) ).**

1. Вводится подстановка  $y = uv$  (или  $x = uv$ ), (20)

где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ .

Тогда  $y' = u'v + uv'$  (или  $x' = u'v + uv'$ )

Подставляем  $y$  и  $y'$  в уравнение (18) ( или  $x$  и  $x'$  в уравнение (18.2) ):

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \quad (\text{или } u'v + uv' + p(y)uv = q(y) ).$$

2. Выносим за скобки  $v$ :

$$v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x) \quad (\text{или } v(u' + p(y)u) + uv' = q(y) ). \quad (*)$$

3. Так как полученное уравнение является уравнением с двумя переменными  $u$  и  $v$ , то оно имеет множество решений. Найдем одно из значений функции  $u$ . Для этого выражение, стоящее в скобках приравниваем к нулю. Заменяем  $u' = \frac{du}{dx}$

( или  $u' = \frac{du}{dy}$  ). Разделяем переменные и интегрируем. Находим  $u$  (полагаем,

что постоянная  $C = 0$ ).

$$u' + P(x)u = 0 \quad (\text{или } u' + p(y)u = 0 ).$$

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0 \quad (\text{или } \frac{du}{dy} + p(y)u = 0 ).$$

$$\frac{du}{dx} = -P(x)u \quad (\text{или } \frac{du}{dy} = -p(y)u ).$$

$$du/u = -P(x)dx \quad (\text{или } du/u = -p(y)dy ).$$

$$\int du/u = -\int P(x)dx \quad (\text{или } \int du/u = -\int p(y)dy ).$$

$$\ln|u| = -\int P(x)dx \quad (\text{или } \ln|u| = -\int p(y)dy ).$$

$$u = e^{-\int P(x)dx} \quad (\text{или } u = e^{-\int p(y)dy} ).$$

4. Найденное значение  $u$  подставляем в подчеркнутую часть уравнения (\*).

$$e^{-\int P(x)dx} v' = Q(x) \quad (\text{или } e^{-\int p(y)dy} v' = q(y) ).$$

5. Заменяем  $v' = \frac{dv}{dx}$  ( или  $v' = \frac{dv}{dy}$  ). Разделяем переменные и интегрируем.

Находим  $v$ .

$$e^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x) \quad (\text{или } e^{-\int p(y)dy} \frac{dv}{dy} = q(y) ).$$

$$dv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \quad (\text{или } dv = q(y)e^{\int p(y)dy} dy ).$$

$$v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \quad (\text{или } v = \int q(y)e^{\int p(y)dy} dy + C ).$$

6. По формуле (20) находим  $y = uv$  ( или находим  $x = uv$  ).

$$y = e^{-\int P(x)dx} (\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C) \quad (\text{или } x = e^{-\int p(y)dy} (\int q(y) e^{\int p(y)dy} dy + C) ).$$

**ПРИМЕР 7.**

Найти общее решение дифференциального уравнения  $y' - 3x^2y - x^2 e^{x^3} = 0$ .

Решение:

1. Воспользуемся подстановкой  $y = uv$ , тогда  $y' = u'v + uv'$ :

$$u'v + uv' - 3x^2uv = x^2 e^{-x^3} .$$

2. Выносим за скобки  $v$ :

$$v(u' - 3x^2u) + uv' = x^2 e^{x^3}.$$

-----

3. Выражение, стоящее в скобках приравняем к нулю. Заменяем  $u' = du/dx$ .  
Разделяем переменные и интегрируем. Находим  $u$ .

$$u' - 3x^2u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2u,$$

$$du/u = 3x^2dx,$$

$$\int du/u = \int 3x^2dx,$$

$$\ln|u| = x^3,$$

$$u = e^{x^3}.$$

4. Найденное значение  $u$  подставляем в подчеркнутую часть уравнения:

$$e^{x^3} v' = x^2 e^{x^3},$$

$$v' = x^2.$$

5. Заменяем  $v' = \frac{dv}{dx}$ . Разделяем переменные и интегрируем. Находим  $v$ .

$$\frac{dv}{dx} = x^2,$$

$$dv = x^2dx,$$

$$\int dv = \int x^2dx,$$

$$v = x^3/3 + C.$$

6. По формуле  $y=uv$  находим общее решение:

$$y = e^{x^3} (x^3/3 + C).$$

### Уравнение Бернулли.

Уравнение вида  $y' + P(x)y = Q(x)y^m$ , (21)

где  $m \neq 0$ ,  $m \neq 1$ , называется уравнением Бернулли.

При помощи подстановки  $z = y^{1-m}$  (22)

оно преобразуется в линейное уравнение вида  $z' + (1 - m)P(x)z = (1 - m)Q(x)$ . (23)

Еще один способ интегрирования уравнения (21) предполагает использование метода Бернулли, то есть подстановки (20):  $y = uv$ .

Покажем это на примере 8.

#### ПРИМЕР 8.

Найти общее решение дифференциального уравнения  $y' - y/(x - 1) = y^2/(x - 1)$ .

Решение:

1. Воспользуемся подстановкой  $y = uv$ , тогда  $y' = u'v + uv'$ :

$$u'v + uv' - uv/(x - 1) = (uv)^2/(x - 1).$$

2. Выносим за скобки  $v$ :

$$v(u' - u/(x - 1)) + uv' = (uv)^2/(x - 1).$$

3. Выражение, стоящее в скобках приравняем к нулю. Заменяем  $u' = du/dx$ .

Разделяем переменные и интегрируем. Находим  $u$ .

$$u' - u/(x - 1) = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = u/(x - 1),$$

$$du/u = dx/(x - 1),$$

$$\int du/u = \int dx/(x - 1),$$

$$\ln|u| = \ln|x - 1|,$$

$$\mathbf{u = x - 1.}$$

4. Найденное значение  $u$  подставляем в подчеркнутую часть уравнения:

$$(x - 1)v' = (x - 1)^2 v^2 / (x - 1),$$

$$v' = v^2.$$

5. Заменяем  $v' = \frac{dv}{dx}$ . Разделяем переменные и интегрируем. Находим  $v$ .

$$\frac{dv}{dx} = v^2,$$

$$dv/v^2 = dx,$$

$$-1/v = x + C,$$

$$\mathbf{v = -1/(x + C).}$$

6. По формуле  $y = uv$  находим общее решение:

$$\mathbf{y = (x - 1)(-1/(x + C)).}$$

$$\mathbf{y = (x - 1)/(-x - C).}$$