§ 66. РЯДЫ ФУРЬЕ

66.1. Периодические функции. Периодические процессы

При изучении разнообразных *периодических процессов*, т. е. процессов, которые через определенный промежуток времени повторяются (встречаются в радиотехнике, электронике, теории упругости, теории и практике автоматического регулирования и т. д.), целесообразнее разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в так называемый тригонометрический ряд.

Напомним, что функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется *периодической* (см. п. 14.3) *с периодом* $T > 0$, если при каждом $x \in D$ значение $(x+T) \in D$ и выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

Для построения графика периодической функции периода T достаточно построить его на любом отрезке длины T и периодически продолжить его во всю область определения.

Отметим основные свойства периодической функции.

1. Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих один и тот же период T, есть периодическая функция с периодом T.

2. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ имеет период $\frac{T}{a}$: действительно, $f\left(a \cdot \left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax+T) = f(ax)$.

3. Если функция $f(x)$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[x_0; x_1] \in \mathbb{R}$, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$ при любых a и $b \in [x_0; x_1]$.

☐ Пусть, например, $0 < a < b < T$, тогда

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{a+T} f(x)\,dx. \tag{66.1}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{a+T} f(x)\,dx + \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx. \tag{66.2}$$

Но $\int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx =$ (подстановка $x = u+T$) $= \int\limits_a^b f(u+T)\,du = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.
Подставляем полученный результат в (66.2) и, сравнивая с (66.1), имеем $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$. ■

В частности, $\int\limits_0^T f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)\,dx$.

Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Период этих функций равен 2π, т. е. $T = 2\pi$.

Простейшим периодическим процессом (движением) является *простое гармоническое колебание* (движение), описываемое функцией

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{66.3}$$

$t \geqslant 0$, где A — *амплитуда колебания*, ω — *частота*, φ_0 — *начальная фаза*.

Функцию такого вида (и ее график) называют *простой гармоникой*. Основным периодом функции (66.3) является $T = \frac{2\pi}{\omega}$, т. е. одно полное колебание совершается за промежуток времени $\frac{2\pi}{\omega}$ (ω показывает, сколько колебаний совершает точка в течение 2π единиц времени).

Проведем преобразование функции (66.3):

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\omega t\cos\varphi_0 + A\cos\omega t\sin\varphi_0 = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \tag{66.4}$$

где $a = A\sin\varphi_0$, $b = A\cos\varphi_0$. Отсюда видно, что простое гармоническое колебание описывается периодическими функциями $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$.

Сложное гармоническое колебание, возникающее в результате наложения конечного (или бесконечного) числа простых гармоник, также описывается функциями вида $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Так, функция

$$\varphi(t) = A_0 + A_1\sin(t+\varphi_1) + A_2\sin(2t+\varphi_2) + \ldots + A_{30}\sin(30t+\varphi_{30}) = \\ = A_0 + \sum_{n=1}^{30} A_n\sin(nt+\varphi_n)$$

или, что равносильно, функция $\varphi(t) = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{30}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$ задает сложное гармоническое колебание. Так как период первой гармоники есть $T_1 = 2\pi$, второй $T_2 = \frac{2\pi}{2}$, третьей $T_3 = \frac{2\pi}{3}$, ..., тридцатой

$T_{30} = \frac{2\pi}{30}$, а период функции $y = A_0$ («нулевая гармоника») есть любое число, то функция $\varphi(t)$ имеет период, равный 2π, т. е. $T = 2\pi$.

Понятно, что при наложении простых гармоник получаем периодическую функцию, описывающую сложное периодическое колебание (периодический процесс).

Возникает вопрос: всякую ли периодическую функцию, описывающую периодический процесс, можно представить в виде суммы простых гармоник вида (66.3) или (66.4)? Если да, то как найти неизвестные параметры (коэффициенты) каждой из этих гармоник? Ответим сначала на второй вопрос, а потом и на первый.

66.2. Тригонометрический ряд Фурье

С помощью так называемого тригонометрического ряда любую (практически) периодическую функцию можно представить в виде ряда, членами которого являются простые гармоники.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (66.5)$$

где действительные числа a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ называются *коэффициентами* ряда.

Ряд (66.5) можно записать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n). \quad (66.6)$$

Действительно, положив $a_n = A_n \sin\varphi_n$, $b_n = A_n \cos\varphi_n$, получим: $a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \sin(nx + \varphi_n)$; ряд (66.5) принимает вид (66.6), при этом $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Свободный член ряда записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул.

Приведем формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Считая m и n целыми положительными, находим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \neq 0) \\ \left. x \right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n = 0), \end{cases} \quad (66.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0 \quad \text{при любом } n, \quad (66.8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\big)\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n), \end{cases} \tag{66.9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\big)\, dx = 0, \tag{66.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big)\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n). \end{cases} \tag{66.11}$$

Замечания.

1. Формулы (66.7)–(66.11) показывают, что семейство функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

обладает ***свойством ортогональности***: интеграл от произведения любых двух функций этого семейства на интервале, имеющем длину 2π, равен нулю.

2. Формулы (66.7)–(66.11) справедливы и в случае, когда область интегрирования есть отрезок $[0; 2\pi]$ (см. свойство 3 периодических функций, п. 66.1).

Пусть $f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, т. е. $f(x)$ является суммой ряда (66.5):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{66.12}$$

Так как функция $f(x)$ (и сумма ряда) имеет период 2π, то ее можно рассматривать в любом промежутке длины 2π. В качестве основного промежутка возьмем отрезок $[-\pi; \pi]$ (также удобно взять отрезок $[0; 2\pi]$) и предположим, что ряд (66.12) на этом отрезке можно почленно интегрировать. Вычислим коэффициенты a_n и b_n. Для этого проинтегрируем обе части равенства (66.12) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx = \pi a_0.$$

Интегралы от всех, кроме нулевого, членов ряда равны нулю в силу формул (66.7) и (66.8).

Отсюда

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.} \tag{66.13}$$

Умножив обе части равенства (66.12) на $\cos mx$ и проинтегрировав полученный ряд в пределах от $-\pi$ до π, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx \right).$$

В силу формул (66.7), (66.9) и (66.10) из последнего равенства при $m = n$ получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = a_n \pi.$$

Отсюда

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{66.14}$$

Аналогично, умножив равенство (66.12) на $\sin mx$ и проинтегрировав почленно на отрезке $[-\pi; \pi]$, найдем:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{66.15}$$

Числа a_0, a_n, b_n, определяемые по формулам (66.13)–(66.15), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (66.5) с такими коэффициентами — ***рядом Фурье*** функции $f(x)$.

Для интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ записывают

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и говорят: функции $f(x)$ соответствует (поставлен в соответствие) ее ряд Фурье. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим $S(x)$.

§ 67. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

67.1. Теорема Дирихле

Выясним условия, при которых знак соответствия ($\sim$) можно заменить знаком равенства ($=$), т. е. условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой как раз функцию $f(x)$.

Будем рассматривать функции $f(x)$, имеющие период $T = 2\pi$. Такие функции называют 2π-*периодическими*.

Сформулируем теорему, представляющую достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема 67.1 (Дирихле). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т. е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т. е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т. е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы (*условия Дирихле*), то на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет место разложение (66.12):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

причем коэффициенты вычисляются по формулам (66.13)–(66.15). Это равенство может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi;\pi]$.

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

Замечания.

1. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[0;2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (66.12), где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n=1,2,3,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,2,3,\ldots$$

(Интегралы $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$ равны в силу свойства 3 периодической функции — см. п. 66.1.)

2. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях. Существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, т. е. теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но не необходимое.

Пример 67.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -x & \text{при } -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Решение: На рисунке 260 изображен график функции $f(x)$. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, значит, она разложима в ряд Фурье. Находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos nx\,dx =$$

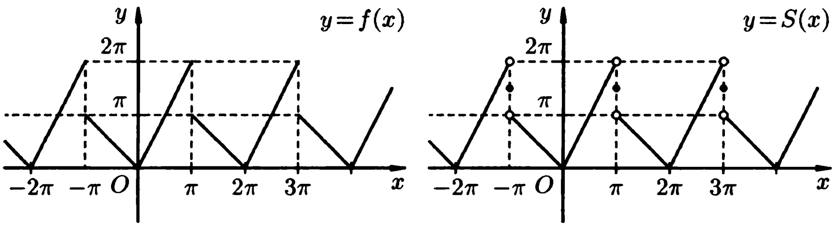

Рис. 260

$$\left(\text{интегрируем по частям: } \left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx\, dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right]\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos \pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos \pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n^2}\big(1 - (-1)^n\big).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \dots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Исходной функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\big(1 - (-1)^n\big)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точкой отрезка $[-\pi; \pi]$, поэтому, согласно теореме Дирихле, для всех этих точек имеем равенство $f(x) = S(x)$, т. е.

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) +$$
$$+ \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots\right).$$

В точках $x = \pm\pi$ сумма $S(x)$ ряда равна

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

Графики функций $f(x)$ и $S(x)$ показаны на рис. 260. ●

67.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если разлагаемая на отрезке $[-\pi; \pi]$ в ряд Фурье функция $f(x)$ является четной или нечетной, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье (вычисление их упрощается) и на виде самого ряда (он становится так называемым неполным).

Если функция $f(x)$ *четная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{67.1}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{67.2}$$

Если функция $f(x)$ *нечетная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{67.3}$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{67.4}$$

❑ Как известно (см. п. 39.4), если функция $f(x)$ интегрируема на симметричном отрезке $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)\, dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \tag{67.5}$$

Если функция $f(x)$ — четная, то $f(x) \cos nx$ — четная функция ($f(-x) \cos(-nx) = f(x) \cos nx$), а $f(x) \sin nx$ — нечетная функция ($f(-x) \sin(-nx) = -f(x) \sin nx$).

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то, очевидно, функция $f(x) \cos nx$ — нечетная, а $f(x) \sin nx$ — четная.

С учетом формулы (67.5) из формул (66.13)–(66.15) получаем формулы (67.1)–(67.4). ■

Ряды (67.1) и (67.3) называются ***неполными*** тригонометрическими рядами, или рядами *по косинусам* и *по синусам* соответственно.

Пример 67.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in (-\pi; \pi)$, $T = 2\pi$.

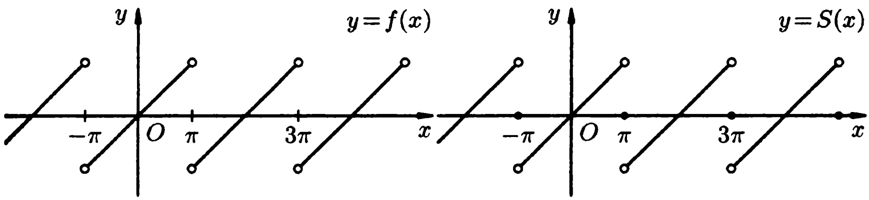

Рис. 261

Решение: На рисунке 261 изображен график заданной функции. Условиям Дирихле функция $y = x$ удовлетворяет. Эта функция — нечетная. Следовательно, $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos \pi n,$$

т. е. $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ряд Фурье содержит только синусы:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

При этом $S(\pm\pi) = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$ (см. рис. 261). ●

67.3. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода

Разлагать в ряд Фурье можно и периодические функции с периодом, отличным от 2π.

Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l; l]$, имеет период $2l$ $(f(x+2l) = f(x)$, где l — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

Сделав подстановку $x = \frac{l}{\pi}t$, данную функцию $f(x)$ преобразуем в функцию $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi; \pi]$ и имеет период $T = 2\pi$.

Действительно, если $t = -\pi$, то $x = -l$, если $t = \pi$, то $x = l$ и при $-\pi < t < \pi$ имеем $-l < x < l$;

$$\varphi(t+2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

т. е. $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t)$.

Разложение функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет вид

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt,$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt\quad(n=0,1,2,\dots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt\quad(n=1,2,\dots).$$

Возвращаясь к переменной x и заметив, что $t=\frac{\pi x}{l}$, $dt=\frac{\pi}{l}dx$, получим

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l},}\tag{67.6}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx\quad(n=0,1,2,\dots),\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx\quad(n=1,2,\dots).\end{aligned}}\tag{67.7}$$

Ряд (67.6) с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (67.7), называется *рядом Фурье для функции* $f(x)$ с периодом $T=2l$.

Замечание. Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π-периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых $T=2l$. В частности, если $f(x)$ на отрезке $[-l;l]$ *четная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l},\tag{67.8}$$

где

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx,\quad n=1,2,\dots;\tag{67.9}$$

если $f(x)$ — *нечетная* функция, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l},\tag{67.10}$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx,\quad n=1,2,\dots\tag{67.11}$$

Пример 67.3. Разложить функцию $f(x) = x$ на интервале $(-4;4)$ в ряд Фурье.

○ Решение: Данная функция нечетная, удовлетворяет условиям Дирихле. По формулам (67.10) и (67.11), при $l = 4$, имеем:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{4},$$

где $b_n = \frac{2}{4}\int\limits_0^4 x \sin\frac{\pi n x}{4}\,dx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Вычисляем b_n:

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Big|_0^4\right) =$$

$$= -\frac{8}{\pi n}\cos \pi n = \frac{8}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом,

$$x = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3} - \ldots\right)$$

для $-4 < x < 4$. ●

67.4. Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть $y = f(x)$ — непериодическая функция, заданная на всей числовой оси $(-\infty < x < \infty)$.

Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, т. к. сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x.

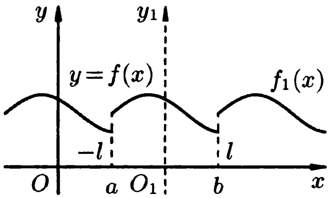

Рис. 262

Однако *непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье* на любом *конечном промежутке* $[a;b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину отрезка $[a;b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2l = |b-a|$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-l \leqslant x \leqslant l$. На рисунке 262 приведена иллюстрация построения функции $f_1(x)$.

Разлагаем функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a;b]$ (кроме точек разрыва) совпадает с заданной функцией $f(x)$. Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными функциями.

Пусть теперь непериодическую функцию $f(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0;l]$. (Это частный случай: начало координат перенесено в точку $x = a$ отрезка $[a;b]$; область определения функции $f(x)$ будет иметь вид $[0;l]$, где $l = |b - a|$.)

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l;0]$, а затем осуществить ее периодическое продолжение с периодом $T = 2l$. Разложив в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ полученную таким образом периодическую функцию $f_1(x)$, получим искомый ряд для функции $f(x)$ при $x \in [0;l]$.

В частности, функцию $f(x)$ можно доопределить на отрезке $[-l;0]$ четным образом (т. е. чтобы при $-l \leqslant x \leqslant 0$ было $f(x) = f(-x)$) — см. рис. 263. В этом случае функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье, который содержит только косинусы (см. формулы (67.8) и (67.9)).

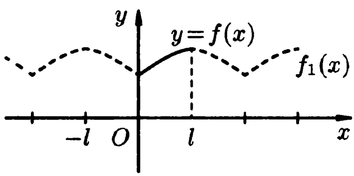

Рис. 263

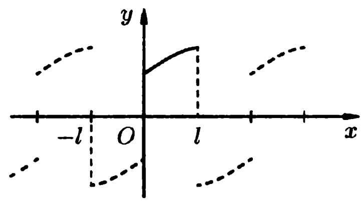

Рис. 264

Если же функцию $f(x)$ продолжить на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом (см. рис. 264), то она разлагается в ряд, состоящий только из синусов (см. формулы (67.10) и (67.11)).

Ряд косинусов и ряд синусов для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;l]$, имеют одну и ту же сумму. Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, то сумма как одного, так и другого ряда равна одному и тому же числу: $S(x_0) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$.

Замечание. Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$, переносится практически без изменения на случай, когда функция задана на отрезке $[0;\pi]$; такую функцию можно разложить как в ряд косинусов, так и в ряд синусов (формулы (67.1) и (67.3)).

Пример 67.4. Разложить в ряд косинусов функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $0 < x < \pi$.

◯ Решение: Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi; 0]$ четным образом (см. рис. 265). Разлагаем в ряд функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi + x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

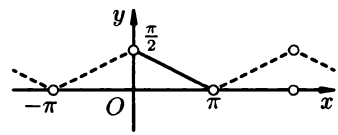

Рис. 265

с периодом $T = 2\pi$. Условиям теоремы Дирихле функция $f_1(x)$ удовлетворяет. Используя формулы (67.1) и (67.2), находим:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos\pi n).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right),$$

где $0 < x < \pi$ $\left(\text{при этом } S(0) = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2},\ S(\pm\pi) = \frac{0+0}{2} = 0\right)$. ●

67.5. Комплексная форма ряда Фурье

Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи. Преобразуем ряд (66.12) и его коэффициенты (66.13)–(66.15) к комплексной форме. Для этого используем формулы Эйлера, выражающие косинус и синус через показательную функцию:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

(из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и вытекающего из нее равенства $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ находим, что $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$). Подставив эти выражения в ряд (66.12), находим:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)e^{inx}}{2} + \frac{(a_n + ib_n)e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}, \quad (67.12)$$

где обозначено $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Найдем выражения для комплексных коэффициентов c_n и c_{-n}. Используя выражения для a_n и b_n (формулы (66.14) и (66.15)), получим:

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

т. е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{67.13}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{67.14}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + i\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \quad (n = 1, 2, 3\dots). \tag{67.15}$$

Таким образом, формулу (67.12) можно записать в виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}, \quad \text{или} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{67.16}$$

Коэффициенты этого ряда, согласно формулам (67.13)–(67.15), можно записать в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{67.17}$$

Равенство (67.16) называется ***комплексной формой ряда Фурье функции*** $f(x)$, а числа c_n, найденные по формуле (67.17), — ***комплексными коэффициентами ряда Фурье***.

Если функция $f(x)$ задается на отрезке $[-l; l]$, то комплексная форма ее ряда Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \quad c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{67.18}$$

Как видим, комплексная форма ряда Фурье (и коэффициентов) более компактна, чем обыкновенный ряд Фурье.

В электротехнике и радиотехнике члены ряда $c_n e^{i\frac{\pi n x}{l}}$ называются *гармониками*, коэффициенты c_n — *комплексными амплитудами* гармоник, а числа $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — *волновыми числами* функции $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$.

Совокупность величин $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ называется *амплитудным спектром.*

Графически амплитудный спектр изображается в виде вертикальных отрезков длиной c_n, расположенных в точках $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ числовой оси.

Пример 67.5. Построить ряд Фурье в комплексной форме для 2-периодической функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0), \\ 1 & x \in [0; 1], \end{cases} \qquad T = 2.$$

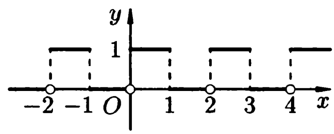

Рис. 266

Решение: На рисунке 266 изображен график функции $f(x)$. По формулам (67.18) находим $(l = 1)$:

$$c_n = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-i\pi n x}dx = -\frac{e^{-i\pi n x}}{2\pi n i}\bigg|_0^1 = \frac{-1}{2\pi n i}\left(e^{-i\pi n} - 1\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi n}(\cos\pi n - i\sin\pi n - 1) = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n}i, \quad n \neq 0; \quad c_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для всех точек непрерывности функции $f(x)$ справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2} + i\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n}e^{i\pi n x} =$$

$$= \frac{1}{2} - i\left(\frac{e^{i\pi x}}{\pi} + \frac{e^{-\pi x}}{\pi} + \frac{e^{3i\pi x}}{3\pi} + \frac{e^{-3i\pi x}}{3\pi} + \ldots\right)$$

$\left(S(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \ S(\pm 1) = \frac{1+1}{2} = 1, \text{ на графике } S(x) \text{ не отмечена}\right)$.

§ 68. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Как известно, всякую (периодическую или непериодическую) функцию $f(x)$, удовлетворяющую на отрезке $[-l; l]$ условиям теоремы

Дирихле, можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\omega_n x + b_n \sin\omega_n x, \tag{68.1}$$

где $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_n t\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\omega_n t\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{68.2}$$

Это разложение будет справедливым на всей числовой оси Ox в том случае, когда $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 2l$.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ — непериодическая функция, заданная на бесконечном промежутке $(-\infty; \infty)$ (т. е. $l = +\infty$).

Будем предполагать, что на любом конечном промежутке $[-l; l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и что сходится следующий несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = M < \infty.$$

Говорят: $f(x)$ *абсолютно интегрируема* на всей числовой оси.

Подставляя в ряд (68.1) значения коэффициентов a_n и b_n (68.2), получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)(\cos\omega_n t\cdot\cos\omega_n x + \sin\omega_n t\cdot\sin\omega_n x)\,dt,$$

т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt. \tag{68.3}$$

Будем теперь неограниченно увеличивать l. Первое слагаемое в правой части равенства (68.3) при $l \to +\infty$ стремится к нулю, т. к.

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(t)|dt \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \frac{M}{2l} \to 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое в равенстве (68.3). Величина $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ принимает значения $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{l}$, $\omega_3 = \frac{3\pi}{l}$, …, образующие бесконечную арифметическую прогрессию с разностью $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l}$

($\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), при этом $\Delta\omega_n \to 0$ при $l \to +\infty$. Итак,

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\cdot\frac{\pi}{l} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt\right)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\cdot\Delta\omega_n,$$

где $\varphi(\omega_n) = \int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega_n(t-x)\,dt$, $\omega_n = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots, \frac{n\pi}{l}, \ldots$

Полученная сумма напоминает интегральную сумму для функции

$$\varphi(\omega) = \int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\omega(t-x)\,dt, \quad \omega\in(0;+\infty)$$

(доказывается, что так оно и есть), поэтому, переходя в равенстве (68.3) к пределу при $l \to +\infty$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n)\Delta\omega_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\varphi(\omega)\,d\omega,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \tag{68.4}$$

Формула (68.4) называется ***формулой Фурье***, а интеграл в правой части формулы — ***интегралом Фурье*** для функции $f(x)$.

Формула Фурье имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$; в точках разрыва данной функции интеграл Фурье равен среднему арифметическому ее односторонних пределов:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Формулу (68.4) можно переписать в другом виде (в виде однократного интеграла):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\cos\omega t\cdot\cos\omega x + \sin\omega t\cdot\sin\omega x\big)dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty}d\omega\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\cdot\cos\omega x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\cdot\sin\omega x\right),$$

т. е.

$$\boxed{f(x)=\int\limits_0^{\infty}\big(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\big)\,d\omega,}\tag{68.5}$$

где

$$\boxed{\begin{aligned}A(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt,\\ B(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.\end{aligned}}$$

Как видно, есть аналогия между рядом Фурье и интегралом Фурье: в обоих случаях функция $f(x)$ раскладывается на сумму гармонических составляющих. Однако, ряд Фурье суммируется по индексу n, принимающему дискретные значения $n=1,2,3,\ldots$, в интеграле Фурье производится интегрирование по непрерывной переменной ω.

Некоторые сведения, связанные с интегралом Фурье, изложим в виде замечаний.

Замечания.

1. Если функция $f(x)$ — *четная,* то формула Фурье (68.5) принимает вид

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt;\tag{68.6}$$

в случае нечетной функции —

$$f(x)=\int\limits_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.\tag{68.7}$$

2. Если функция $f(x)$ задана лишь на промежутке $(0;+\infty)$, то ее можно продолжить на промежуток $(-\infty;0)$ разными способами, в частности — четным или нечетным образом: в первом случае она будет представлена формулой (68.6), во втором — формулой (68.7).

3. Формулу Фурье (68.5) можно представить в симметричной форме записи, если положить в формулах (68.6) и (68.7) $A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{A}(\omega)$, $B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\widetilde{B}(\omega)$. В случае четной функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\widetilde{A}(\omega)\cos\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad \widetilde{A}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt;$$

в случае нечетной функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\widetilde{B}(\omega)\sin\omega x\,d\omega,\quad \text{где}\quad \widetilde{B}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Функции $\widetilde{A}(\omega)$ и $\widetilde{B}(\omega)$ называются соответственно ***косинус-преобразованием*** и ***синус-преобразованием Фурье*** для функции $f(x)$.

4. *Интеграл Фурье* (68.4) *в комплексной форме* имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt;$$

интеграл Фурье (68.5) имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

где $c(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$; или в симметричной форме записи

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{c}(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

где

$$\widetilde{c}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$(c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widetilde{c}(\omega))$.

Пример 68.1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (0; +\infty), \\ 0, & x = 0, \\ -e^{x}, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

Решение: Функция удовлетворяет условиям представимости интегралом Фурье, абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty; +\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 2.$$

Функция нечетная, применим формулу (68.7):

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin \omega t\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{1 + \omega^2}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\omega}{1 + \omega^2} \cdot \sin \omega x\, d\omega, \quad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Замечание. Интересно отметить, что если $x = 1$, то

$$f(1) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\omega \sin \omega}{1 + \omega^2} \, d\omega.$$

С другой стороны, $f(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^\infty \frac{y \sin y}{1 + y^2} \, dy = f(1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2e}.$$

Иными словами, при помощи представления функций интегралом Фурье иногда можно вычислить величины несобственных интегралов.