§ 64. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

64.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Как известно (см. теорема 26.1), для любой функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0 и имеющей в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (64.1)$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $c \in (x_0, x)$, — остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$. Формулу (64.1) кратко можно записать в виде

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x),}$$

где $P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ — многочлен Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков (т. е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$), то из формулы Тейлора получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$, называемое *рядом Тейлора*:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.} \quad (64.2)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый *ряд Маклорена*:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.} \quad (64.3)$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции (это необходимое условие) в окрестности точки x_0. Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции $f(x)$. Так, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ производные всех порядков, причем $f^{(n)}(0) = 0$ при всяком n (см. пример 19.5). Ряд Маклорена имеет вид

$$0 + \frac{0}{2!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \ldots + \frac{0}{n!}x^n + \ldots$$

Он сходится, но его сумма $S(x)$ в любой точке x равна нулю, а не $f(x)$.

Пусть для функции $f(x)$ составлен соответствующий ей ряд Тейлора.

Теорема 64.1. Для того чтобы ряд Тейлора (64.2) функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора (64.1) стремился к нулю при $n \to \infty$, т. е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

❑ Пусть ряд Тейлора (64.2) сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, т. е. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$. Так как n-я частичная сумма $S_n(x)$ ряда (64.2) совпадает с многочленом Тейлора $P_n(x)$, т. е. $S_n(x) = P_n(x)$, находим:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - P_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n(x)) = \\ = f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Обратно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - R_n(x)) = \\ = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - 0 = f(x). \quad ■$$

Замечание. Если ряд Тейлора (64.2) сходится к порождающей функции $f(x)$, то остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора, т. е. $R_n(x) = r_n(x)$. (Напомним, что $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, а $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда Тейлора.)

Таким образом, задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд сведена по существу к определению значений x, при которых

$R_n(x) \to 0$ (при $n \to \infty$). Если сделать это не просто, то следует каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд Тейлора сходится к данной функции.

На практике часто пользуются следующей теоремой, которая дает простое достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 64.2. Если модули всех производных функций $f(x)$ ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом $M > 0$, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$, т. е. имеет место разложение (64.2).

❑ Согласно теореме 64.1, достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. По условию теоремы 64.2 для любого n имеет место неравенство $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$. Тогда имеем:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} M \cdot \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = M \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

Осталось показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$. Для этого рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+2} \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot |x-x_0|^{n+1}} = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1,$$

то по признаку Даламбера этот ряд сходится на всей числовой оси. Но тогда, в силу необходимого признака сходимости,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. ■

64.2. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена (64.3) нужно:

а) найти производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$;

б) вычислить значения производных в точке $x_0 = 0$;

в) написать ряд (64.3) для заданной функции и найти его интервал сходимости;

г) найти интервал $(-R; R)$, в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Маклорена совпадают.

Замечание. В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций (эти разложения следует запомнить):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.6}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leqslant -1, \end{cases} \tag{64.7}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad x \in (-1; 1), \tag{64.8}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad x \in (-1; 1], \tag{64.9}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ldots, \qquad x \in [-1; 1], \tag{64.10}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \tag{64.11}$$

$$\cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad x \in [-1; 1], \tag{64.12}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.13}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty). \tag{64.14}$$

Докажем формулу (64.4). Пусть $f(x) = e^x$.

❑ Имеем:

а) $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = e^x$, $\ldots$;

б) $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $\ldots$, $f^{(n)}(0) = 1$, $\ldots$;

в) $e^x \sim 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$; $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$, т. е. ряд сходится в интервале $(-\infty; \infty)$;

г) для всех $x \in (-R; R)$ имеем $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^R = M$, т. е. все производные в этом интервале ограничены одним и тем же числом $M = e^R$. Следовательно, по теореме 64.2 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Таким образом, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ ■

Докажем формулу (64.5). Пусть $f(x) = \sin x$.

❑ Имеем:

а) $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$, $f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$ $\ldots$;

б) $f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, 6, \ldots, \\ -1, & n = 3, 7, 11, \ldots, \\ +1, & n = 1, 5, 9, \ldots; \end{cases}$

в) $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ Легко проверить, что полученный ряд сходится на всей числовой оси, т. е. при всех $x \in (-\infty; \infty)$;

г) любая производная функции $f(x) = \sin x$ по модулю не превосходит единицы, $|f^{(n)}(x)| = \left|\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$. Следовательно, по теореме 64.2 имеет место разложение (64.5). ■

Докажем формулу (64.6). Пусть $f(x) = \cos x$.

❑ Формулу (64.6) можно доказать так же, как и формулу (64.5). Однако проще получить разложение функции $\cos x$, воспользовавшись свойством 3 степенных рядов. Продифференцировав почленно ряд (64.5), получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty). \qquad ■$$

Докажем формулы (64.13), (64.14). Пусть $f(x) = \operatorname{ch} x$ (или $f(x) = \operatorname{sh} x$).

❑ Заменив в формуле (64.4) x на $-x$, получим разложение функции e^{-x}:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad (64.15)$$

справедливое для всех $x \in (-\infty; \infty)$.

Суммируя (и вычитая) почленно равенства (64.4) и (64.15), получим разложение гиперболического косинуса (синуса):

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Формулы (64.13) и (64.14) доказаны. ■

Докажем формулу (64.7). Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

❑ Имеем:

а) $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, ..., $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$, ..., $n \in \mathbb{N}$;

б) $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, ..., $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$, ...;

в) $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$ $\ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$;

г) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))\cdot(n+1)!}{n!\cdot\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$, т. е. составленный для функции $(1+x)^\alpha$ ряд сходится в интервале $(-1; 1)$.

Можно показать, что и в данном случае, т. е. при $x \in (-1; 1)$, остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. ■

Ряд (64.7) называется *биномиальным*. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то все члены ряда с $(n+1)$-го номера равны 0, так как содержат множитель $\alpha - n = n - n = 0$. В этом случае ряд (64.7) представляет собой известную формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}x^n.$$

Докажем формулу (64.8). Пусть $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

❑ Формула (64.8) может быть получена разными способами:

1) пользуясь правилом разложения функции в ряд;

2) рассматривая ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ как ряд геометрической прогрессии, первый член которой равен единице и знаменатель $q = x$; известно (см. пример 62.1), что данный ряд сходится при $x \in (-1; 1)$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$;

3) воспользовавшись формулой (64.7): положив в ней $\alpha = -1$ и заменив x на $-x$, получим формулу (64.8). ■

Докажем формулу (64.9). Пусть $f(x) = \ln(1 + x)$.

Формула (64.9) также может быть доказана разными способами. Приведем один из них.

❑ Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,$$

справедливое для всех $x \in (-1; 1)$. Используя свойство 4 степенных рядов, проинтегрируем данный ряд на отрезке $[0; x]$, $x \in (-1; 1)$:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^x dt - \int\limits_0^x t\,dt + \int\limits_0^x t^2\,dt - \int\limits_0^x t^3\,dt + \ldots + (-1)^n \int\limits_0^x t^n\,dt + \ldots,$$

или

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Можно показать, что это равенство справедливо и для $x = 1$. ■

Докажем формулу (64.10). Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

❑ Положив в формуле (64.7) $\alpha = -1$ и заменив x на x^2, получим равенство

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1; 1).$$

Тогда

$$\int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\limits_0^x 1\,dt - \int\limits_0^x t^2\,dt + \int\limits_0^x t^4\,dt - \ldots + \int\limits_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt + \ldots,$$

или

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Можно показать, что равенство справедливо и при $x = \pm 1$, т. е. при всех $x \in [-1; 1]$. ■

Докажем формулу (64.12). Пусть $f(x) = \arcsin x$.

❑ Положив в формуле (64.7) $\alpha = -\frac{1}{2}$ и заменив x на $(-x^2)$, получим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots, \quad x \in [-1;1].$$

Тогда

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x dt + \int_0^x \frac{t^2}{2}\,dt + \int_0^x \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4\,dt + \ldots,$$

или

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Можно показать, что полученное равенство справедливо при всех $x \in [-1;1]$. ■

Ряды (64.4)–(64.14) в комбинации с правилами сложения, вычитания, умножения, дифференцирования, интегрирования степенных рядов (см. свойства степенных рядов) могут быть использованы при разложении (некоторых) других функций в ряд Маклорена (Тейлора).

Пример 64.1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 3^x$.

○ Решение: Так как $3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x\ln 3}$, то, заменяя x на $x\ln 3$ в разложении (64.4), получим:

$$3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!}x + \frac{\ln^2 3}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\ln^n 3}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-\infty;\infty).$$ ●

Пример 64.2. Выписать ряд Маклорена функции $f(x) = \ln(4-x)$,

○ Решение: Так как

$$f(x) = \ln(4-x) = \ln 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = \ln 4 + \ln\left[1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right],$$

то, воспользовавшись формулой (64.9), в которой заменим x на $(-\frac{x}{4})$, получим:

$$\ln(4-x) = \ln 4 + \left(-\frac{x}{4}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3} - \ldots,$$

или

$$\ln(4-x) = \ln 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots,$$

если $-1 < -\frac{x}{4} \leqslant 1$, т. е. $-4 \leqslant x < 4$. ●

Пример 64.3. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{2}{3-x}.$$

Решение: Воспользуемся формулой (64.8). Так как

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3\cdot\left(1-\frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

то, заменив x на $\frac{x}{3}$ в формуле (64.8), получим:

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\ldots\right),$$

или

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3^3}+\ldots+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^n}{3^n}+\ldots,$$

где $-1 < \frac{x}{3} < 1$, т. е. $-3 < x < 3$.