Глава XIV. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 62. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

62.1. Основные понятия

Ряд, членами которого являются функции от x, называется *функциональным:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{62.1}$$

Придавая x определенное значение x_0, мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** ряда (62.1); если же ряд расходится — ***точкой расходимости*** функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости.*

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: $S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad \text{где} \quad S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \ —$$

частичная сумма ряда.

Пример 62.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Решение: Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$. Следовательно, этот ряд сходится при $|x| < 1$, т. е. при всех $x \in (-1; 1)$; сумма ряда равна $\dfrac{1}{1-x}$:

$$S(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{при} \quad |x| < 1.}$$

●

Пример 62.2. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}.$$

Решение: Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2^2 x}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| + \ldots \qquad (62.2)$$

Так как при любом $x \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение $\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд с общим членом $\frac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический ряд, $p = 2 > 1$, см. п. 60.4), то по признаку сравнения ряд (62.2) сходится при $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится при всех $x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$. ●

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т. е. так называемый ***степенной ряд***:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (62.3)$$

Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***коэффициентами ряда*** (62.3), $x \in \mathbb{R}$ — действительная переменная.

Ряд (62.3) расположен по степеням x. Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, т. е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (62.4)$$

где x_0 — некоторое постоянное число.

Ряд (62.4) легко приводится к виду (62.3), если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (62.3).

§ 63. СХОДИМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Выясним вопрос о сходимости степенного ряда (62.3).

Область сходимости степенного ряда (62.3) содержит по крайней мере одну точку: $x = 0$ (ряд (62.4) сходится в точке $x = x_0$).

63.1. Теорема Н. Абеля

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема 63.1 (Абель). Если степенной ряд (62.3) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

❑ По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Отсюда следует, что величина $a_n x_0^n$ ограничена, т. е. найдется такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $|a_n x_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $|x| < |x_0|$, тогда величина $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M \cdot q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. модуль каждого члена ряда (62.3) не превосходит соответствующего члена сходящегося ($q < 1$) ряда геометрической прогрессии. Поэтому по признаку сравнения при $|x| < |x_0|$ ряд (62.3) абсолютно сходящийся. ■

Следствие 63.1. Если ряд (62.3) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

❑ Действительно, если допустить сходимость ряда в точке x_2, для которой $|x_2| > |x_1|$, то по теореме Абеля ряд сходится при всех x, для которых $|x| < |x_2|$, и, в частности, в точке x_1, что противоречит условию. ■

63.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала ряд (62.3) расходится.

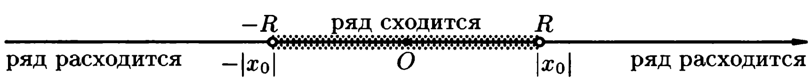

Рис. 259

Интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ и называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$. Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, т. е. $R > 0$ — это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (62.3) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится (см. рис. 259).

В частности, когда ряд (62.3) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (62.3) сходится при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ (т. е. во всех точках числовой оси), то считаем, что $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (т. е. при $x = R$ и при $x = -R$) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (62.3) можно поступить следующим образом. Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера. Допустим, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $|x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, т. е. ряд сходится при тех значениях x, для которых

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

ряд, составленный из модулей членов ряда (62.3), расходится при тех значениях x, для которых $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Таким образом, для ряда (62.3) радиус абсолютной сходимости

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.} \tag{63.1}$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{63.2}$$

Замечания.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можно убедиться, что ряд (62.3) абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то $R = 0$.

2. Интервал сходимости степенного ряда (62.4) находят из неравенства $|x - x_0| < R$; имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3. Если степенной ряд содержит не все степени x, т. е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости (формулы (63.1) и (63.2)), а непосредственно

применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Пример 63.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

◔ Решение: Воспользуемся формулой (63.1):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1!)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси. ●

Пример 63.2. Найти область сходимости ряда

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

◔ Решение: Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$|u_n| = \frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+1}| \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot |x^{2n-1}|} = |x^2| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем ряд $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем ряд $+1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ — это тоже сходящийся лейбницевский ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1; 1]$. ●

Пример 63.3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}.$$

◔ Решение: Находим радиус сходимости ряда по формуле (63.1):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} : \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x + 2 < 2$, т. е. при $-4 < x < 0$.

При $x = -4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуотрезок $[-4; 0)$. ●

63.3. Свойства степенных рядов

Сформулируем без доказательства *основные свойства* степенных рядов.

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (62.3) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R; R)$.

2. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{63.3}$$

при $-R < x < R$ выполняется равенство

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots \tag{63.4}$$

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда (63.3) при $-R < a < x < R$ выполняется равенство (см. замечание 1, с. 416)

$$\int_a^x S(t)\,dt = \int_a^x a_0\,dt + \int_a^x a_1 t\,dt + \int_a^x a_2 t^2\,dt + \ldots + \int_a^x a_n t^n\,dt + \ldots \tag{63.5}$$

Ряды (63.4) и (63.5) имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

Перечисленные свойства 1–4 остаются справедливыми и для степенных рядов вида (62.4).

Свойства степенных рядов широко используются в теоретических исследованиях и в приближенных вычислениях.