

## § 61. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

### 61.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакочередующимися. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1}u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}u_n, \quad (61.1)$$

где  $u_n > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  (т. е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно).

Для знакочередующихся рядов имеет место *достаточный* признак сходимости (установленный в 1714 г. Лейбницем в письме к И. Бернулли).

**Теорема 61.1 (признак Лейбница).** Знакопередающийся ряд (61.1) сходится, если:

1. Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е.  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$ ;

2. Общий член ряда стремится к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

При этом сумма  $S$  ряда (61.1) удовлетворяет неравенствам

$$0 < S < u_1. \quad (61.2)$$

□ Рассмотрим сначала частичную сумму четного числа ( $2m$ ) членов ряда (61.1). Имеем

$$\begin{aligned} S_{2m} &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2m-1} - u_{2m} = \\ &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}). \end{aligned}$$

Выражение в каждой скобке, согласно первому условию теоремы, положительно. Следовательно, сумма  $S_{2m} > 0$  и возрастает с возрастанием номера  $2m$ .

С другой стороны,  $S_{2m}$  можно переписать так:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Легко видеть, что  $S_{2m} < u_1$ . Таким образом, последовательность  $S_2, S_4, S_6, \dots, S_{2m}, \dots$  возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ , причем  $0 < S < u_1$ .

Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного числа ( $2m+1$ ) членов ряда (61.1). Очевидно, что  $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$ . Отсюда следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + 0 = S,$$

т. к.  $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$  в силу второго условия теоремы. Итак,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  как при четном  $n$ , так и при нечетном  $n$ . Следовательно, ряд (61.1) сходится, причем  $0 < S < u_1$ . ■

*Замечания.*

1. Исследование знакопередающегося ряда вида

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots \quad (61.3)$$

(с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на  $(-1)$  к исследованию ряда (61.1).

Ряды (61.1) и (61.3), для которых выполняются условия теоремы Лейбница, называются *лейбницевскими* (или рядами Лейбница).

⊗ 2. Соотношение (61.2) позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму  $S$  данного

ряда его частичной суммой  $S_n$ . Отброшенный ряд (остаток) представляет собой также знакочередующийся ряд  $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \dots)$ , сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, т. е.  $S'_n < u_{n+1}$ . Поэтому ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

**Пример 61.1.** Вычислить приблизительно сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

○ Решение: Данный ряд лейбницевского типа. Он сходится. Можно записать:  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \dots = S$ . Взяв пять членов, т. е. заменив  $S$  на

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} \approx 0,7834,$$

сделаем ошибку, меньшую, чем  $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0,00003$ . Итак,  $S \approx 0,7834$ .

## 61.2. Общий достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов

☞ Знакочередующийся ряд является частным случаем знакочередующегося ряда. Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется **знакочередующимся**.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий *общий достаточный признак сходимости*.

**Теорема 61.2.** Пусть дан знакочередующийся ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (61.4)$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (61.5)$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакочередующийся ряд (61.4).

□ Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (61.4) и (61.5):

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \dots + (u_n + |u_n|) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|).$$

Очевидно, что  $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$  сходится в силу условия теоремы и свойства 1 числовых рядов (п. 59.1). Следовательно, на основании признака сравнения (п. 59.3) сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ . Поскольку данный знакопеременный ряд (61.4) представляет собой разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

то, на основании свойства 2 числовых рядов, он (ряд (61.4)) сходится. ■

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (61.4), то это не означает, что будет сходиться ряд (61.5).

**Пример 61.2.** Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ .

○ Решение: Это знакочередующийся ряд, для которого выполнены условия признака Лейбница. Следовательно, указанный ряд сходится. Однако ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

расходится (гармонический ряд). ●

### 61.3. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов

☞ Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Так, ряд, показанный в примере (61.2), условно сходящийся. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

абсолютно сходится, т. к. ряд, составленный из модулей его членов, сходится (см. пример 60.4).

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм (переместительность, сочетательность, распределительность).

Основные свойства абсолютно сходящихся рядов приводим без доказательства.

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму  $S$ , то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму  $S$ , что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами  $S_1$  и  $S_2$  можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна  $S_1 + S_2$  (или соответственно  $S_1 - S_2$ ).

3. Под произведением двух рядов  $u_1 + u_2 + \dots$  и  $v_1 + v_2 + \dots$  понимают ряд вида

$$(u_1v_1) + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \dots \\ \dots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \dots + u_nv_1) + \dots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами  $S_1$  и  $S_2$  есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна  $S_1 \cdot S_2$ .

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды суммируются, вычитаются, перемножаются как обычные ряды. Суммы таких рядов не зависят от порядка записи членов.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие утверждения (свойства), вообще говоря, не имеют места.

Так, переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится. Например, ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  условно сходится по признаку Лейбница. Пусть его сумма равна  $S$ . Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right) = \frac{1}{2}S.$$

Сумма уменьшилась вдвое!

Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или расходящийся ряд (теорема Римана).

Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости знакоположительных рядов, заменяя всюду общий член ряда его модулем.