Глава XIII. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекции 51–52

§ 59. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

59.1. Основные понятия

Бесконечные ряды широко используются в теоретических исследованиях математического анализа, имеют разнообразные практические применения.

Числовым рядом (или просто ***рядом***) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{59.1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — действительные или комплексные числа, называемые ***членами ряда***, u_n — ***общим членом*** ряда.

Ряд (59.1) считается заданным, если известен общий член ряда u_n, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

Сумма первых n членов ряда (59.1) называется n-й ***частичной суммой*** ряда и обозначается через S_n, т. е. $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$$

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (59.1), то этот предел называют ***суммой ряда*** (59.1) и говорят, что ряд ***сходится***. Записывают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (59.1) называют ***расходящимся***. Такой ряд суммы не имеет.

Рассмотрим примеры.

1. Ряд $2 + 17 - 3\frac{1}{4} + 196 + \ldots$ нельзя считать заданным, а ряд $2+5+8+\ldots$ — можно: его общий член задается формулой $u_n = 3n-1$.

2. Ряд $0+0+0+\ldots+0+\ldots$ сходится, его сумма равна 0.

3. Ряд $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ расходится, $S_n = n \to \infty$ при $n \to \infty$.

4. Ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots$ расходится, так как последовательность частичных сумм $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ ($S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \ldots$) не имеет предела.

5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ сходится. Действительно,

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

т. е. ряд сходится, его сумма равна 1.

Рассмотрим некоторые важные свойства рядов.

Свойство 1. Если ряд (59.1) сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots, \tag{59.2}$$

где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд (59.1) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (59.2) расходится.

❑ Обозначим n-ю частичную сумму ряда (59.2)через $S_n^{(u)}$. Тогда

$$S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = c \cdot S_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} S_n^{(u)} = \lim_{n \to \infty} cS_n = c \cdot \lim_{n \to \infty} S_n = c \cdot S,$$

т. е. ряд (59.2) сходится и имеет сумму cS.

Покажем теперь, что если ряд (59.1) расходится, $c \neq 0$, то и ряд (59.2) расходится. Допустим противное: ряд (59.2) сходится и имеет сумму S_1. Тогда

$$S_1 = \lim_{n \to \infty} S_n^{(u)} = \lim_{n \to \infty} cS_n = c \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Отсюда получаем:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{S_1}{c},$$

т. е. ряд (59.1) сходится, что противоречит условию о расходимости ряда (59.1). ■

Свойство 2. Если сходится ряд (59.1) и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{59.3}$$

а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n), \tag{59.4}$$

причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

❑ Обозначим n-е частичные суммы рядов (59.1), (59.3) и (59.4) через $S_n^{(u)}$, $S_n^{(v)}$ и S_n соответственно. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} \pm \lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_1 \pm S_2,$$

т. е. каждый из рядов (59.4) сходится, и сумма его равна $S_1 \pm S_2$ соответственно. ■

Из свойства 2 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

В справедливости этого утверждения можно убедиться методом от противного.

Заметим, что сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду (59.1) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (59.1) сходятся или расходятся одновременно.

❑ Обозначим через S сумму отброшенных членов, через k — наибольший из номеров этих членов. Чтобы не менять нумерацию оставшихся членов ряда (59.1), будем считать, что на месте отброшенных членов поставили нули. Тогда при $n > k$ будет выполняться равенство $S_n - S'_n = S$, где S'_n — это n-я частичная сумма ряда, полученного из ряда (59.1) путем отбрасывания конечного числа членов. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S + \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$. Отсюда следует, что пределы в левой и правой частях одновременно существуют или не существуют, т. е. ряд (59.1) сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов.

Аналогично рассуждаем в случае приписывания к ряду конечного числа членов. ■

Ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{59.5}$$

называется n-м ***остатком ряда*** (59.1). Он получается из ряда (59.1) отбрасыванием n первых его членов. Ряд (59.1) получается из остатка добавлением конечного числа членов. Поэтому, согласно свойству 3, ряд (59.1) и его остаток (59.5) одновременно сходятся или расходятся.

Из свойства 3 также следует, что если ряд (59.1) сходится, то его остаток $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

59.2. Ряд геометрической прогрессии

Исследуем сходимость ряда

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0), \tag{59.6}$$

который называется *рядом геометрической прогрессии*. Ряд (59.6) часто используется при исследовании рядов на сходимость.

Как известно, сумма первых n членов прогрессии находится по формуле $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}.$$

Рассмотрим следующие случаи в зависимости от величины q:

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, ряд (59.6) сходится, его сумма равна $\dfrac{a}{1-q}$;

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд (59.6) расходится;

3. Если $|q| = 1$, то при $q = 1$ ряд (59.6) принимает вид $a + a + a + \cdots + a + \cdots$, для него $S_n = n \cdot a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (59.6) расходится; при $q = -1$ ряд (59.6) принимает вид $a - a + a - a + \ldots$ — в этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, ряд (59.6) расходится.

Итак, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

Пример 59.1. Показать, что ряд $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \ldots$ сходится.

Решение: Данный ряд можно переписать так:

$$2^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Как видно, он представляет собой ряд геометрической прогрессии с $a = 2^3$ и $q = \frac{1}{2} < 1$. Этот ряд сходится согласно свойству 1 числовых рядов. ●

59.3. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд

Нахождение n-й частичной суммы S_n и ее предела для произвольного ряда во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные *признаки сходимости*. Первым из них, как правило, является необходимый признак сходимости.

Теорема 59.1. Если ряд (59.1) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

❑ Пусть ряд (59.1) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ (при $n \to \infty$ и $(n-1) \to \infty$). Учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad ■$$

Следствие 59.1 (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

❑ Действительно, если бы ряд сходился, то (по теореме) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Но это противоречит условию. Значит, ряд расходится. ■

Пример 59.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$.

❍ Решение: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$ расходится, т. к.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0,$$

т. е. выполняется достаточное условие расходимости ряда. ●

Пример 59.3. Исследовать сходимость ряда

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \ldots$$

❍ Решение: Данный ряд расходится, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. ●

Теорема 59.1 дает необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное: из условия $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не следует, что ряд сходится. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

В качестве примера рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots} \tag{59.7}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Однако ряд (59.7) расходится. Покажем это.

❑ Как известно (см. (17.14)), $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Отсюда следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Логарифмируя это неравенство по основанию e, получим:

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1,$$

т. е.

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}, \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Подставляя в полученное неравенство поочередно $n = 1, 2, \ldots, n-1, n$, получим:

$$\begin{aligned} &1 > \ln 2, \\ &\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2, \\ &\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n. \end{aligned}$$

Сложив почленно эти неравенства, получим $S_n > \ln(n+1)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. гармонический ряд (59.7) расходится. ■

В качестве второго примера можно взять ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако этот ряд расходится.

Действительно,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n},$$

т. е. $S_n > \sqrt{n}$. Следовательно, $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$, ряд расходится. ■

§ 60. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЯДОВ

Необходимый признак сходимости не дает, вообще говоря, возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью так называемых *достаточных признаков*.

Рассмотрим некоторые из них для ***знакоположительных*** рядов, т. е. рядов с неотрицательными членами (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения его на (-1), что, как известно, не влияет на сходимость ряда).

60.1. Признаки сравнения рядов

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с другим («эталонным») рядом, о котором известно, сходится он или нет. В основе такого сравнения лежат следующие теоремы.

Теорема 60.1. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{60.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{60.2}$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \leqslant v_n, \tag{60.3}$$

то из сходимости ряда (60.2) следует сходимость ряда (60.1), из расходимости ряда (60.1) следует расходимость ряда (60.2).

Обозначим n-е частичные суммы рядов (60.1) и (60.2) соответственно через $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$. Из неравенства (60.3) следует, что

$$S_n^{(u)} \leqslant S_n^{(v)}. \tag{60.4}$$

Пусть ряд (60.2) сходится и его сумма равна S_2. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_2$. Члены ряда (60.2) положительны, поэтому $S_n^{(v)} < S_2$ и, следовательно, с учетом неравенства (60.4), $S_n^{(u)} \leqslant S_2$. Таким образом, последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, S_n^{(u)}, \ldots$ монотонно возрастает ($u_n > 0$) и ограничена сверху числом S_2. По признаку существования предела (см. теорема 15.3) последовательность $\{S_n^{(u)}\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(n)} = S_1$, т. е. ряд (60.1) сходится.

Пусть теперь ряд (60.1) расходится. Так как члены ряда неотрицательны, в этом случае имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \infty$. Тогда, с учетом неравенства (60.4), получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = \infty$, т. е. ряд (60.2) расходится. ■

Замечание. Теорема 60.1 справедлива и в том случае, когда неравенство (60.3) выполняется не для всех членов рядов (60.1) и (60.2), а начиная с некоторого номера N. Это вытекает из свойства 3 числовых рядов (см. п. 59.1).

Теорема 60.2 (предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда (60.1) и (60.2). Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ $(0 < A < \infty)$, то ряды (60.1) и (60.2) сходятся или расходятся одновременно.

❑ По определению предела последовательности (см. п. 15.2) для всех n, кроме, возможно, конечного числа их, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon$, или

$$(A-\varepsilon)\cdot v_n < u_n < (A+\varepsilon)\cdot v_n. \tag{60.5}$$

Если ряд (60.1) сходится, то из левого неравенства (60.5) и теоремы 60.1 вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_n$ также сходится. Но тогда, согласно свойству 1 числовых рядов (см. п. 59.1), ряд (60.2) сходится.

Если ряд (60.1) расходится, то из правого неравенства (60.5), теоремы 60.1, свойства 1 вытекает, что и ряд (60.2) расходится.

Аналогично, если ряд (60.2) сходится (расходится), то сходящимся (расходящимся) будет и ряд (60.1). ■

Пример 60.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$.

○ Решение: Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится ($q = \frac{1}{2} < 1$). Имеем $\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}$. Следовательно, данный ряд сходится. ●

Пример 60.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

○ Решение: Здесь $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Возьмем ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$, который расходится (гармонический ряд). Имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geqslant \frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд расходится. ●

Пример 60.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5n}$.

○ Решение: Применим предельный признак сравнения. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5} \neq 0$ (см. пример 17.7), то по теореме 60.2 исходный ряд расходится, как сравнимый с гармоническим рядом. ●

60.2. Признак Даламбера

В отличие от признаков сравнения, где все зависит от догадки и запаса известных сходящихся и расходящихся рядов, признак Даламбера (1717–1783, французский математик) позволяет часто решить вопрос о сходимости ряда, проделав лишь некоторые операции над самим рядом.

Теорема 60.3. Пусть дан ряд (59.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.
Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

□ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon. \tag{60.6}$$

Пусть $l < 1$. Можно подобрать ε так, что число $l+\varepsilon < 1$. Обозначим $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Тогда из правой части неравенства (60.6) получаем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, или $u_{n+1} < q \cdot u_n$, $n > N$. В силу свойства 3 числовых рядов можно считать, что $u_{n+1} < q \cdot u_n$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ Давая номеру n эти значения, получим серию неравенств:

$$\begin{aligned}
&u_2 < q \cdot u_1, \\
&u_3 < q \cdot u_2 < q^2 u_1, \\
&u_4 < q \cdot u_3 < q^3 u_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&u_n < q \cdot u_n < q^{n-1} u_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

т. е. члены ряда $u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$ меньше соответствующих членов ряда $qu_1 + q^2 u_1 + q^3 u_1 + \ldots + q^{n+1} u_1 + \ldots$, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. Но тогда, на основании признака сравнения, сходится ряд $u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$, следовательно, сходится и исходный ряд (59.1).

Пусть $l > 1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$. Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$, т. е. члены ряда возрастают с увеличением номера n. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. На основании следствия из необходимого признака (см. п. 59.3) ряд (59.1) расходится. ■

Замечания.

1. Если $l = 1$, то ряд (59.1) может быть как сходящимся, так и расходящимся.

2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n.

Пример 60.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

◐ Решение: Находим

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится. ●

Пример 60.5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

Решение: Вычисляем

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{3^n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n^2}{3^n\cdot(n+1)^2} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 3.$$

Так как $l = 3 > 1$, то данный ряд по признаку Даламбера расходится. ●

60.3. Радикальный признак Коши

Иногда удобно пользоваться *радикальным признаком Коши* для исследования сходимости знакоположительного ряда. Этот признак во многом схож с признаком Даламбера, о чем говорят его формулировка и доказательство.

Теорема 60.4. Пусть дан ряд (59.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Как и для признака Даламбера, в случае, когда $l = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым. Доказательство теоремы аналогично доказательству признака Даламбера. Поэтому опустим его.

Пример 60.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение: Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то применим радикальный признак Коши к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Вычисляем

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e} < 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд, согласно свойству 1 числовых рядов. ●

60.4. Интегральный признак Коши. Обобщенный гармонический ряд

Теорема 60.5. Если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \ldots$, то:

1) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и ряд (59.1);

2) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится также и ряд (59.1).

О сходимости несобственных интегралов см. § 40.

❑ Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, основанием которой служит отрезок оси Ox от $x = 1$ до $x = n$ (см. рис. 258).

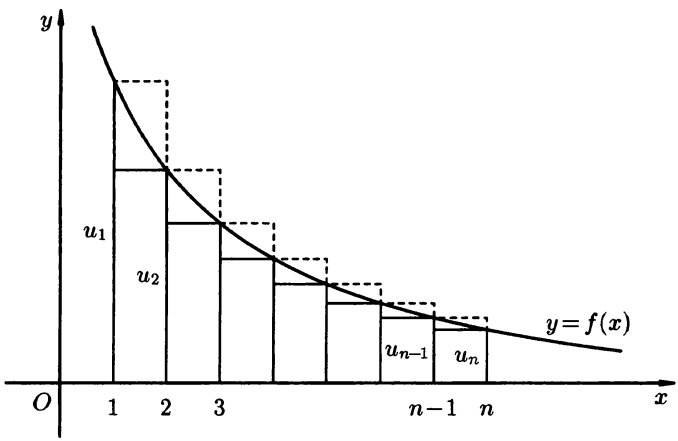

Рис. 258

Построим входящие и выходящие прямоугольники, основаниями которых служат отрезки $[1;2]$, $[2;3]$, … Учитывая геометрический смысл определенного интеграла, запишем:

$$f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+\ldots+f(n)\cdot 1 < \int\limits_1^n f(x)\,dx < f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+\ldots+f(n-1)\cdot 1,$$

или

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_n < \int_1^n f(x)\,dx < u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$

или

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x)\,dx < S_n - u_n. \qquad (60.7)$$

Случай 1. Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, т. е. $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = A$. Поскольку $\int_1^n f(x)\,dx < \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = A$, то с учетом неравенства (60.7) имеем: $S_n - u_1 < A$, т. е. $S_n < u_1 + A$. Так как последовательность частичных сумм монотонно возрастает и ограничена сверху (числом $u_1 + A$), то, по признаку существования предела, имеет предел. Следовательно, ряд (59.1) сходится.

Случай 2. Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Тогда $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ и интегралы $\int_1^n f(x)\,dx$ неограниченно возрастают при $n \to \infty$. Учитывая, что $S_n > \int_1^n f(x)\,dx + u_n$ (см. (60.7)), получаем, что $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, данный ряд (59.1) расходится. ■

Замечание. Вместо интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ можно брать интеграл $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$, где $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Отбрасывание k первых членов ряда в ряде (59.1), как известно, не влияет на сходимость (расходимость) ряда.

Пример 60.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

○ Решение: Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ удовлетворяет условиям теоремы 60.5. Находим

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x|\Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Значит, ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{x \ln x}$ расходится. ●

Ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots,} \tag{60.8}$$

где $p > 0$ — действительное число, называется *обобщенным гармоническим рядом.* Для исследования ряда (60.8) на сходимость применим интегральный признак Коши (признаки Даламбера и Коши ответа о сходимости не дают).

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$ и $f(n) = \frac{1}{n^p} = u_n$. При $p \neq 1$ имеем:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{a \to \infty} \int_1^a x^{-p}\, dx = \lim_{a \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^a =$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left(\frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } p < 1. \end{cases}$$

При $p = 1$ имеем гармонический ряд $u_n = \frac{1}{n}$, который расходится (второй способ: $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$). Итак, ряд (60.8) сходится при $p > 1$, расходится при $p \leqslant 1$. В частности, ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ сходится (полезно знать).

Рассмотренные признаки сходимости (есть и другие) знакоположительных рядов позволяют судить о сходимости практически любого положительного ряда. Необходимые навыки приобретаются на практике.