ГЛАВА 3. ПРОИЗВОДНЫЕ

При решении задач по дифференциальному исчислению часто приходится обращаться к основным теоремам о дифференцируемых функциях.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ имеет конечную производную внутри этого отрезка и $f(a)=f(b)$, то существует хотя бы одно $c\in(a,b)$ такое, что $f'(x)=0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ имеет конечную производную внутри этого отрезка, и $f(a)=f(b)$, то существует хотя бы одно $c\in(a,b)$ такое, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$ имеют конечные производные внутри этого отрезка и $f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0$, $g(a)\neq g(b)$, то существует хотя одно $c\in(a,b)$ такое, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Задачи

3.1. Пусть $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дважды дифференцируемая функция и $f(0)=0$. Доказать, что существует $\xi\in(-\pi/2,\pi/2)$ такая, что

$$f''(\xi)=f(\xi)\left(1+2\operatorname{tg}^2\xi\right)^4.$$

Решение

Обозначим $g(x) = f(x)\cos x$. Так как

$$g(-\pi/2) = g(0) = g(\pi/2) = 0,$$

то, по теореме Ролля, существуют $\xi_1 \in (-\pi/2, 0)$ и $\xi_2 \in (0, \pi/2)$ такие, что

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$h(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2 x} = \frac{f'(x)\cos x - f(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Имеем: $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$, по теореме Ролля существует $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, для которой

$$0 = h'(\xi) = \frac{g''(\xi)\cos^2 \xi + 2\cos\xi \sin\xi g'(\xi)}{\cos^4 \xi} =$$

$$= \frac{\left(f''(\xi)\cos\xi - 2f'(\xi)\sin\xi - f(\xi)\cos\xi\right)\cos\xi}{\cos^3 \xi} +$$

$$+ \frac{2\sin\xi \quad f' \quad \xi \quad \cos\xi - f \quad \xi \quad \sin\xi}{\cos^3 \xi} =$$

$$= \frac{f''(\xi)\cos^2 \xi - f(\xi)\left(\cos^2 \xi + 2\sin^2 \xi\right)}{\cos^3 \xi} = \frac{f''(\xi) - f(\xi)\left(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\, \xi\right)}{\cos \xi}.$$

Откуда следует, что $f''(\xi) = f(\xi)\left(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\, \xi\right)$.

Откуда следует, что $f''(\xi) = f(\xi)\left(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\, \xi\right)$.

3.2. Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f'g - fg' \neq 0$. Доказать, что между двумя корнями уравнения $g = 0$ лежит ровно один корень уравнения $f = 0$ и наоборот.

Решение

Пусть $f(\alpha)=f(\beta)=0$ и $g(x)\neq 0$ для всех $x\in(\alpha,\beta)$, следовательно, функция $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна на (α,β) и $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$ и по теореме Ролля существует $\xi\in(\alpha,\beta)$ такая, что

$$\varphi'(\xi)=\frac{f'(\xi)g(x)-f(\xi)g'(x)}{g^2(\xi)}=0.$$

Противоречие.

3.3. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая на отрезке $[0,1]$ функция. Докажите, что уравнение

$$\left(x-x^3\right)f'(x)=\left(3x^2-1\right)f(x)$$

имеет хотя бы один корень.

Решение

Рассмотрим функцию $F(x)=\left(x-x^3\right)f(x)$. Эта функция дифференцируема на отрезке $[0,1]$, причём:

$$F'(x)=\left(x-x^3\right)f'(x)-\left(3x^2-1\right)f(x),$$

$$F(0)=F(1)=0.$$

Значит, функция $F(x)$ на отрезке $[0,1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, т.е. существует такая точка $x_0\in(0,1)$, в которой $F'(x_0)=0$, то есть

$$\left(x_0-x_0^3\right)f(x_0)-\left(3x_0^2-1\right)f(x_0)=0,$$

Для любой дифференцируемой на отрезке $\left[0,1\right]$ функции $f\left(x\right)$. Что и требовалось доказать.

3.4. Доказать, что если

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0,$$

то уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ имеет, по крайней мере, один корень на интервале $\left(0,1\right)$.

Решение

Пусть

$$f\left(x\right)=\frac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\frac{a_1x^n}{n}+\ldots+\frac{a_{n-1}x^2}{2}+a_nx,$$

Тогда $f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$. Следовательно, по теореме Ролля, существует $\xi\in\left(0,1\right)$ такая, что

$$f'\left(x\right)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

3.5. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(x^2-1\right)^n\right\}$$

все корни вещественные и принадлежат интервалу $\left(-1,1\right)$.

Решение

Уравнение $g\left(x\right)=\left(x^2-1\right)^n=0$ имеет корни ±1 кратностью n. Тогда уравнение $g'\left(x\right)=\left[\left(x^2-1\right)^n\right]'=0$, по теореме Ролля, имеет корень $\xi\in\left(-1,1\right)$ и корни ±1 кратностью $\left(n-1\right)$.

Уравнение $g''(x)=\left[\left(x^2-1\right)^n\right]''=0$ имеет корни $\xi_1\in(-1,\xi)$ и $\xi_2\in(\xi,1)$ и корни ±1 кратностью $(n-2)$ и т.д.

Тогда уравнение $g^{(n)}(x)=\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)}=0$ имеет n корней на $(-1,1)$. Но это полином степени n, следовательно, это все его корни.

3.6. Вычислить производную функции $f(x)$ в точке $x=0$, где $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x+2)\left(x+2^2\right)\left(x+2^3\right)\ldots\left(x+2^{2004}\right)}$.

Решение

Рассмотрим функцию

$g(x)=(x+2)\left(x+2^2\right)\left(x+2^3\right)\ldots\left(x+2^{2004}\right)$,

$g(0)=2\cdot2^2\cdot2^3\cdot\ldots\cdot2^{2004}=2^{1+2+\ldots+2004}=2^{2009010}$.

Далее,

$$g'(x)=(x+2)'\left(x+2^2\right)\left(x+2^3\right)\ldots\left(x+2^{2004}\right)+$$

$$+(x+2)\left(x+2^2\right)'\left(x+2^3\right)\ldots\left(x+2^{2004}\right)+$$

$$+(x+2)\left(x+2^2\right)\left(x+2^3\right)'\cdot\ldots\cdot\left(x+2^{2004}\right)+$$

$$+(x+2)\left(x+2^2\right)\left(x+2^3\right)\cdot\ldots\cdot\left(x+2^{2004}\right)'=$$

$$=\left(x+2^2\right)\left(x+2^3\right)\cdot\ldots\cdot\left(x+2^{2004}\right)+(x+2)\left(x+2^3\right)\times\ldots\times$$

$$\times\left(x+2^{2004}\right)+(x+2)\left(x+2^2\right)\left(x+2^4\right)\times\ldots\times$$

$$\times\left(x+2^{2004}\right)+\ldots+(x+2)\left(x+2^{2}\right)\left(x+2^{3}\right)\times\ldots\times$$

$$\times\left(x+2^{2003}\right).$$

Теперь:

$$g'(0)=2^{2}\cdot 2^{3}\cdot\ldots\cdot 2^{2004}+2\cdot 2^{3}\cdot\ldots\cdot 2^{2004}+$$

$$+2\cdot 2^{2}\cdot 2^{3}\cdot\ldots\cdot 2^{2004}+\ldots+2\cdot 2^{2}\cdot 2^{3}\cdot\ldots\cdot 2^{2003}=$$

$$=\frac{2\cdot 2^{2}\cdot 2^{3}\cdot\ldots\cdot 2^{2004}}{2}+\frac{2\cdot 2^{2}\cdot 2^{3}\cdot\ldots\cdot 2^{2004}}{2^{2}}+$$

$$+\frac{2\cdot 2^{2}\cdot 2^{3}\cdot\ldots\cdot 2^{2004}}{2^{3}}+\ldots+\frac{2\cdot 2^{2}\cdot 2^{3}\cdot\ldots\cdot 2^{2004}}{2^{2003}}+$$

$$+\frac{2\cdot 2^{2}\cdot 2^{3}\cdot\ldots\cdot 2^{2004}}{2^{2004}}=g(0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\ldots+\frac{1}{2^{2004}}\right)=$$

$$=g(0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\ldots+\frac{1}{2^{2004}}\right)=g(0)\left(1-2^{-2004}\right).$$

Теперь найдём

$$f'(x):\ f'(x)=\frac{2\cdot g(x)-(2x-1)g'(x)}{g^{2}(x)}$$, значит,

$$f'(0)=\frac{2\cdot g(0)+g'(0)}{g^{2}(0)}=$$

$$=\frac{2\cdot g(0)+g(0)(1-2^{-2004})}{g^{2}(0)}=$$

$$=\frac{2+1-2^{-2004}}{g(0)}=\frac{3-2^{-20004}}{2^{1002}\cdot 2^{2005}}.$$

3.7. Дана функция

$$f\left(x\right)=\left(2-x^5+5x^4-10x^3+10x^2-5x\right)^{-1}.$$

Вычислить $f^{\left(2005\right)}\left(1\right)$.

Решение

$$f(x)=(2-x^5+5x^4-10x^3+10x^2-5x)^{-1}=\frac{1}{1-(x-1)^5}.$$

Рассмотрим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+...+t^n+...,\left|t\right|<1. \qquad (*)$$

Разложим функцию $f\left(x\right)$ в ряд Тейлора в точке $x=1$ [по степеням $\left(x-1\right)$], положив в равенстве (*) $t=(x-1)^5$:

$$\frac{1}{1-(x-1)^5}=1+(x-1)^5+(x-1)^{10}+...+(x-1)^{2000}+$$
$$+(x-1)^{2005}+...,\left|(x-1)^5\right|<1.$$

Заметим, что $f'\left(1\right)=f''\left(1\right)=f^{(3)}\left(1\right)=f^{(4)}\left(1\right)=0$, а $f^{(5)}\left(1\right)=5!$, $f^{(10)}\left(1\right)=10!$.

Аналогично $f^{\left(2005\right)}\left(1\right)=2005!$, поскольку производные всех слагаемых степени ниже 2005 будут равны нулю при дифференцировании, а производные всех слагаемых степени выше 2005 будут равны нулю при подстановке $x=1$.

Ответ: $f^{(2005)}(1) = 2005!$.

3.8. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, а также $f(a) = 0, g(b) = 1, f(x) > 0, g(x) > 0, x \in (a,b)$, то уравнение $\frac{f'(x)}{f(x)} \ln g(x) + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$ имеет, по крайней мере, один корень на интервале (a,b).

Решение

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) \ln g(x)$ и применим теорему Ролля:

$$F'(x) = f'(x) \ln g(x) + f(x) \frac{g'(x)}{g(x)} = 0.$$

Разделим обе части $f(x)$ и будем иметь

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \ln g(x) + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0, x \in (a,b).$$

3.9. Существует ли непрерывно-дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям: $|f(x)| < 2$ и $f(x) \cdot f'(x) \geq \sin x$ при всех действительных значениях x?

Решение

Неравенство из условия задачи переписывается в виде

$$f(x) \cdot f'(x) - \sin x \geq 0$$

или $\left(f^2(x)+2\cos x\right)'\geq 0$. Интегрируя от 0 до точки $x_0>0$, получаем

$$f^2(x_0)+2\cos x_0 \geq f^2(0)+2\cos 0 .$$

Подставляя $x_0=\pi$, получаем

$$f^2(\pi)-f^2(0)\geq 4,$$

откуда следует, что

$$\left|f(\pi)\right|\geq 2 .$$

Ответ: не существует.

3.10. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y=\frac{4x-x^2}{4}, x_0=2 .$$

Решение

Найдём y':

$$y'=\left(\frac{4x-x^2}{4}\right)'=\frac{2-x}{2} .$$

Тогда

$$y_0'=y'(x_0)=0 .$$

Поскольку $y'\left(x_0\right)=0$, то уравнение нормали имеет вид $x=x_0$.

То есть уравнение нормали: $x=2$.

3.11. Пусть функция $f\left(x\right)$ дифференцируема на $\left[x_1,x_2\right]$, причем $0<x_1<x_2$. Доказать, что

$$\frac{1}{x_2-x_1}\left|\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{pmatrix}\right| = \xi f'(\xi)-f(\xi),$$

$\xi\in(x_1,x_2)$.

Решение

Преобразуем правую часть равенства, применяя теорему Коши:

$$\frac{1}{x_2-x_1}\left(x_1 f\left(x_2\right)-x_2 f\left(x_1\right)\right)=\frac{\dfrac{f\left(x_2\right)}{x_2}-\dfrac{f\left(x_1\right)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=$$

$$=\left.\frac{\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x}\right)'}{-\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\right|_{x=\xi}=\frac{\xi f'\left(\xi\right)-f\left(\xi\right)}{\xi^2}\xi^2=$$

$$=\xi f'\left(\xi\right)-f\left(\xi\right).$$

3.12. Существует ли непрерывно дифференцируемая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$\left|f\left(x\right)\right|<2,\ f\left(x\right)f'\left(x\right)\geq\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ?$$

Решение

Имеем

$$f^2\left(x\right)-f^2\left(0\right)=\int\limits_0^x 2f\left(t\right)f'\left(t\right)dt\geq 2\int\limits_0^x \sin t dt==2\left(1-\cos x\right),$$

следовательно, $f^2\left(\pi\right)\geq 4.$

Ответ: не существует.

3.13. Пусть $f_1,...,f_n$ - линейно независимая система непрерывно дифференцируемых на отрезке $\left[0,1\right]$ функций. Доказать, что среди производных $f_1',...,f_n'$ найдутся $n-1$ линейно независимых функций.

Решение

Пусть $f_1',...,f_n'$ линейно зависимы (в противном случае всё ясно) и, например, $c_1f_1'+...+c_{n-1}f_{n-1}'=f_n'$. Тогда $c_1f_1+...+c_{n-1}f_{n-1}+c=f_n$, где $c\neq 0$ в силу линейной независимости системы $\left\{f_k\right\}_{k-1}^n$. Покажем, что функции $\left\{f_k'\right\}_{k=1}^{n-1}$ линейно независимы.

Если

$$a_1f_1'+...+a_{n-1}f_{n-1}'=0,\ \text{то}\ a_1f_1+...+c_{n-1}f_{n-1}+A=0,$$

где $A = const$.

Отсюда $\left(Ac_1 - ca_1\right) f_1 + ... + \left(Ac_{n-1} - ca_{n-1}\right) f_{n-1} = Af_n$.

Следовательно, $A = 0$, а тогда и $a_k = 0$ при $1 \le k \le n-1$.

3.14. Пусть $P\left(x\right)$ – многочлен степени n с вещественными коэффициентами, имеющий только вещественные корни. Доказать, что

$$(n-1)\cdot\left(P'(x)\right)^2 \ge n \cdot P(x)\cdot P''(x)$$

Для любого $x \in \mathbb{R}$.

Решение

Достаточно доказать неравенство $n > 1$ при $x \ne x_i$, где $x_1, ..., x_n$ – корни многочлена $P\left(x\right)$.

Имеем

$$\frac{P'\left(x\right)}{P\left(x\right)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i},$$

$$\frac{P''\left(x\right)}{P\left(x\right)} = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{2}{\left(x - x_i\right)\left(x - x_j\right)}.$$

Следовательно,

$$\left(n-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\right)^2 - n \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{2}{\left(x - x_i\right)\left(x - x_j\right)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{\left(x - x_i\right)^2} - \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{2}{\left(x - x_i\right)\left(x - x_j\right)} =$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{1}{\left(x - x_i\right)} - \frac{1}{\left(x - x_j\right)} \right)^2 \ge 0 .$$

3.15. Дана дифференцируемая функция $f : \left[0,1\right] \to \mathbb{R}$.

Известно, что $x \sin f\left(x\right) + x^2 = f\left(x\right) \sin x + 2 f\left(x\right)^2$ при любом $x \in \left[0,1\right]$. Найти $\left| f'\left(0\right) \right|$.

Решение

Пусть $a = f'\left(0\right)$. Тогда

$$f\left(x\right) = ax + 0\left(x\right), x \to +0,$$

откуда

$$x(\alpha x + 0(x)) + x^2 = (\alpha x + 0(x))(x + 0(x)) =$$

$$= 2\left(ax + 0(x)\right)^2,$$

или $x^2 \left(2a^2 - 1\right) = 0\left(x^2\right)$, т.е. $a^2 = \frac{1}{2}, \left|a\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.16. Пусть $f \in C^2\left(\left[0,1\right]\right)$. Доказать, что функцию f можно представить в виде разности двух выпуклых вниз функций.

Решение

Пусть $h_2(x) = \max\{f''(x), 0\}$, $g_2(x) = \max\{-f''(x), 0\}$.

Пусть $h_1(x) = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t h_2(\tau)\,d\tau\right)dt,\, g(x) = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t g_2(\tau)\,d\tau\right)dt.$

Так как $f''(x) = h_2(x) - g_2(x)$, то найдутся числа a, b такие, что $f(x) = h_1(x) - g(x) + ax + b$. Тогда $f(x) = h(x) - g(x)$, где $h(x) = h_1(x) + ax + b$, выпуклость h и g следует из неотрицательности их вторых производных.