ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Справедлива следующая формула замены переменной или подстановки:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt\,.$$

Здесь $x = \varphi(t)$ -дифференцируемая, а $\varphi'(t)$ - непрерывная на $[\alpha;\beta]$ функции, причем $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$ При этом образ $\varphi([\alpha;\beta])$ входит в область непрерывности функции $f(x)$.

При вычислении определенного интеграла с помощью подстановки не обязательно возвращаться к старой переменной. Важно не забывать менять пределы интегрирования, соответствующие новой переменной.

Пример 2.

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \begin{Bmatrix} x = a\sin t, dx = a\cos t\,dt \\ 0 \le t \le \pi/2 \end{Bmatrix} = a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

В данном примере следует обратить внимание на то, что $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{\cos^2 t} = a|\cos t|$, но поскольку на интервале $[0;\pi/2]$ функция $\cos t$ положительна, то $|\cos t| = \cos t$.

Пример 3.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \begin{Bmatrix} t = e^x, x = \ln t, dx = \dfrac{dt}{t} \\ 1 \le t \le e \end{Bmatrix} = \int_1^e \frac{t}{(1+t)t}dt = \ln(1+t)\Big|_1^e = \ln\frac{1+e}{2}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Для функций $u(x)$ и $v(x)$ непрерывных вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ на интервале $[a;b]$ формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла, также как и формула замены переменной, естественным образом обобщается на случай определенного интеграла:

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Пример 4.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Пример 5. В качестве примера применения формулы интегрирования по частям приведем вывод общих формул при любом $m \in N$ для интегралов

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx, \qquad \widetilde{I}_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx .$$

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$$

В правой части внеинтегральный член равен нулю. Заменяя $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, имеем $I_m = (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$, откуда следует рекуррентная формула $I_m = \dfrac{m-1}{m} I_{m-2}$, по которой интеграл I_m последовательно приводится к I_0 или I_1. Находим $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$. Имеем:

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad \text{при } m = 2n,$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}. \qquad \text{при } m = 2n+1.$$

Для $\widetilde{I}_m$ получаются точно такие же результаты либо непосредственным интегрированием, либо с помощью подстановки $x = \pi/2 - t$, которая переводит $\widetilde{I}_m$ в I_m. (Убедитесь в этом самостоятельно).

Используем понятие двойного факториала, которое означает произведение натуральных чисел, не превосходящих m и одной с ним четности: $m!! = m(m-2)(m-4)\ldots$ (так, $6!! = 6\cdot 4\cdot 2$, а $7!! = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$). Тогда получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad m \quad \text{четном,} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{при} \quad m \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

Аналогичные формулы можно получить для интервалов $[0;\pi]$ и $[0;2\pi]$:

$$\int_0^{\pi} \sin^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \pi & \text{при} \quad m \quad \text{четном,} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot 2 & \text{при} \quad m \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \pi & \text{при} \quad m \quad \text{четном,} \\ 0 & \text{при} \quad m \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^m x dx = \int_0^{2\pi} \cos^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot 2\pi & \text{при} \quad m \quad \text{четном,} \\ 0 & \text{при} \quad m \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

Формулы удобны для практического использования, поскольку непосредственное вычисление этих интегралов хоть и не представляет сложности, но довольно трудоемко.