ТЕОРЕМЫ ОБ ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

1. Теорема (достаточное условие интегрируемости функции).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

В то же время непрерывность не является необходимым условием интегрируемости функции. Класс интегрируемых функций гораздо шире. Можно доказать, что существует определенный интеграл от ограниченных функций, имеющих конечное число точек разрыва на интервале, а также от монотонных и ограниченных функций (см. [1]).

2. Теорема о среднем.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

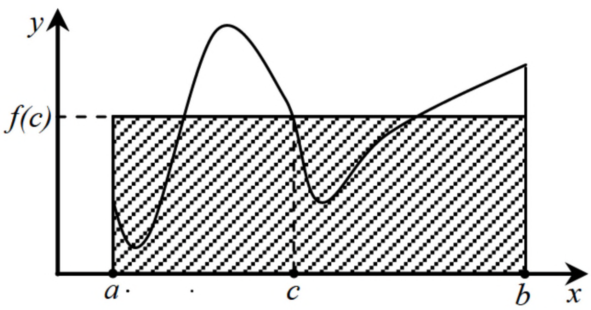

Рис.2.

Теорема о среднем говорит о том, что для непрерывной на $[a;b]$ функции $f(x) \geq 0$ существует прямоугольник с основанием $b-a$ и высотой $f(c)$, $(c \in [a;b])$, такой, что его площадь равна площади криволинейной трапеции (рис.2).

3. Теорема Барроу об интеграле с переменным верхним пределом.

Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,\ x\in[a;b]$. Этот интеграл является функцией своего верхнего предела x.

Производная интеграла от непрерывной функции $f(x)$ по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т.е.

$$\boxed{\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)=f(x).}$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА - ЛЕЙБНИЦА

На практике вычисление определенных интегралов основано на тесной связи между понятиями определенного и неопределенного интегралов. Эту связь устанавливает ***Основная теорема интегрального исчисления:***

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $F(x)$ - некоторая ее первообразная на этом отрезке. Тогда справедлива формула:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)}.$$

Доказательство. По теореме Барроу функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$. Поскольку все первообразные данной функции отличаются на константу C, то любая первообразная непрерывной на сегменте $[a;b]$ функции $f(x)$ имеет вид $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+C$. Полагая в последней формуле сначала $x=a$, а затем $x=b$ и используя свойство 1, получаем $F(a)=C,\ F(b)=\int\limits_a^b f(t)dt+C$, откуда немедленно следует формула Ньютона-Лейбница.

Пример 1. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x\Big|_{-1}^{1}=\mathrm{arctg}1-\mathrm{arctg}(-1)=2\,\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{2}.$