Свойство для оценки определенного интеграла:

Если $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Теорема о среднем

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Отсюда, среднее значение функции: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Пример 1. Оценить интеграл $\int_0^1 x(1-x)\,dx$.

Вычисляя наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в промежутке [0, 1], легко убедимся в том, что $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Отсюда в силу свойства 8 будем иметь:

$$0 < \int_0^1 x(1-x)\,dx < \frac{1}{4}\,^*.$$

Интересно заметить, что точное значение интеграла равно $\frac{1}{6}$.

Замечание!

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке находим используя приложение дифференциального исчисления функциии:

1. Н аходим производную функции.
2. Приравнивая производную к нулю, получаем критические точки.
3. Отбираем те критические точки, которые лежат на отрезке интегрирования [a; b].
4. Находим значения функции в отобранных точках и на концах отрезка.
5. Среди полученных значений выбираем наибольшее M и наименьшее m.

П р и м е р 2. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$.

Так как подынтегральная функция непрерывна на [0, 1], то нетрудно установить, что свое наименьшее значение эта функция принимает при $x=\frac{1}{2}$, а наибольшее — на концах промежутка [0, 1], то есть при $x=0$ и $x=1$. Этими значениями будут: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\approx 0{,}67$ и $f(0)=f(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}70$. Следовательно, для всех x из промежутка [0, 1] имеют место неравенства:

$$\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда согласно с в о й с т в у 8 находим:

$$\frac{2}{3}<\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 4. Найти среднее значение функции $f(x) = \cos^2 x$ на промежутке $[0, \pi]$.

По формуле (12) имеем:

$$f(c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$