СВОЙСТВА И ОЦЕНКИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Для $\forall a, b \in R$ полагаем по определению

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)dx = 0 .$$

2. Аддитивность: для $\forall a, b, c \in R$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

3. Линейность: для $\forall \alpha, \beta \in R$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx .$$

4. Если для $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \ge 0\ (\le 0)$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0\ (\le 0)$.

5. Если для $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

6. Для интегрируемой на $[a,b]$ $f(x)$ имеет место $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

7. Если $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

8. Интеграл от четной и нечетной функций по симметричному интервалу:

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, если $f(x)$ четная функция $f(-x) = f(x)$,

$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$, если $f(x)$ нечетная функция $f(-x) = -f(x)$.

9. Если $f(x)$ периодическая функция с периодом T, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx, \quad n \in Z.$$