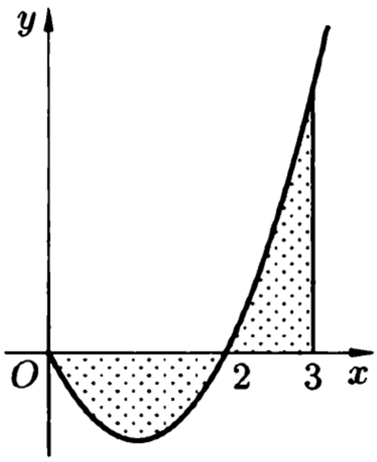


Рис. 177

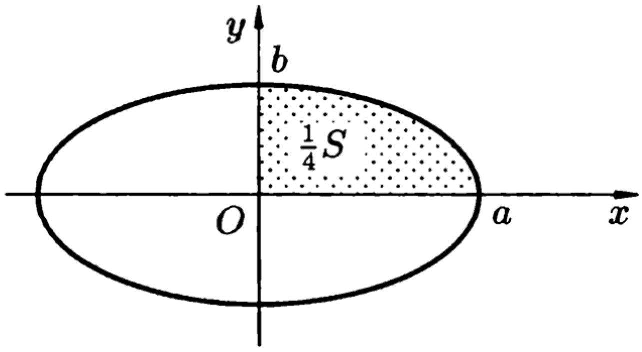


Рис. 178

Пример 41.1. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0; 3]$.

◐ Решение: Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 177. Находим ее площадь S:

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 - x^2\Big|_2^3 = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} - 9 + 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$ ●

Пример 41.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

◐ Решение: Найдем сначала $\frac{1}{4}$ площади S. Здесь x изменяется от 0 до a, следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (см. рис. 178). Находим:

$$\frac{1}{4}S = \int_{\pi/2}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t)\,dt = -ab\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\,dt = \frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}$. Значит, $S = \pi ab$. ●

Пример 41.3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a\cos 3\varphi$ (см. рис. 180).

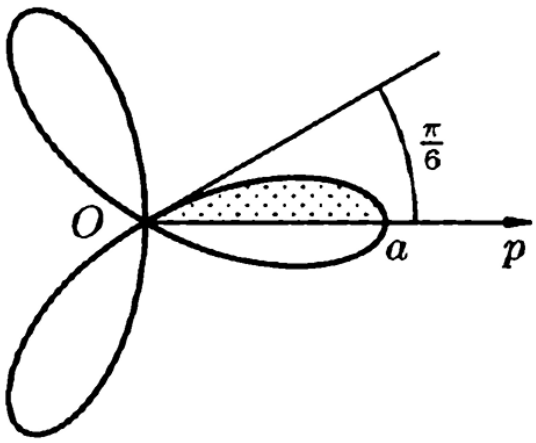


Рис. 180

○ Решение: Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. $\frac{1}{6}$ часть всей площади фигуры:

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(a\cos 3\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\Big(\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6}\Big) = \frac{a^2}{4}\Big(\frac{\pi}{6}+0\Big) = \frac{\pi a^2}{24},$$

т. е. $\frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}$. Следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{4}$. ●

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то лучами, выходящими из полюса, ее следует разбить на криволинейные секторы, к которым применить полученную формулу для нахождения площади. Так, для фигуры, изображенной на рисунке 181, имеем:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\gamma r_3^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r_1^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_\beta^\gamma r_2^2\,d\varphi.$$

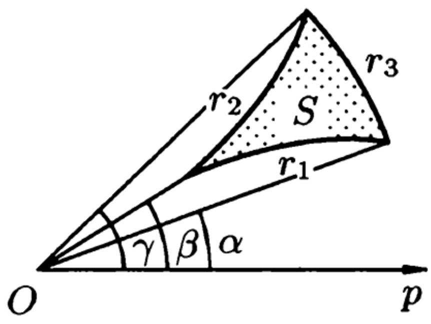
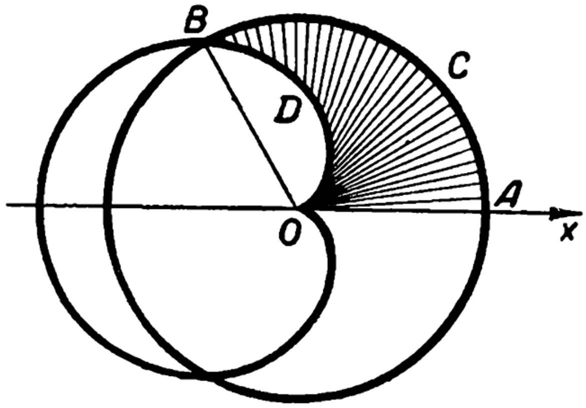


Рис. 181



Черт. 100

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\varrho = 1 - \cos\theta, \quad 2\varrho = 3 \quad \text{и} \quad \theta = 0.$$

Решение. Изобразив линии, соответствующие данным уравнениям, мы видим, что требуется вычислить площадь фигуры $OABO$ (черт. 100).

Решая первые два уравнения совместно, находим, что в точке B, в которой пересекаются кривые, полярный угол равен $\frac{2\pi}{3}$.

Рассматривая искомую площадь S как разность площадей секторов $OACBO$ и $ODBO$, получим

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{9}{4}\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (1-\cos\theta)^2\,d\theta =$$

$$= \frac{9}{8}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta =$$

$$= \frac{9}{8}\theta\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi} - \frac{3}{4}\theta\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi} + \sin\theta\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi} - \frac{\sin 2\theta}{8}\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi} =$$

$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-3x$ и прямой $y+3x-4=0$ (рис. 164).

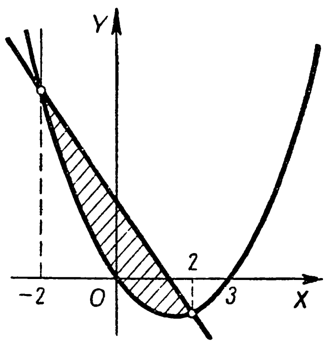


Рис. 164.

В данном случае заштрихованная фигура ограничена двумя линиями. Следовательно, для вычисления площади этой фигуры надо применить формулу (8). Для этого найдем точки пересечения параболы и прямой. Решая систему

$$\begin{cases} y=x^2-3x, \\ y=4-3x, \end{cases}$$

получим $x_1=+2$, $x_2=-2$. Тогда для площади искомой фигуры согласно формуле (8) будем иметь:

$$P=\int_{-2}^{+2}(4-3x-x^2+3x)\,dx=\int_{-2}^{+2}(4-x^2)\,dx=$$

$$=2\int_{0}^{+2}(4-x^2)\,dx=2\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=2\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}.$$

Пример 7. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли (рис. 170) $r^2=a^2\cos 2\Theta$ $(a>0)$.

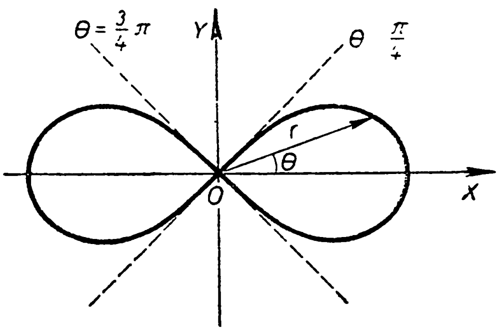


Рис. 170.

Предварительно остановимся на описании формы кривой. При $\Theta=\frac{\pi}{4}$ полярный радиус кривой обращается в нуль, следовательно, кривая проходит через полюс.

Из уравнения кривой видно, что полярный радиус r принимает вещественные значения, когда $\cos 2\Theta\geqslant 0$, то есть когда угол 2Θ удовлетворяет неравенствам * $-\frac{\pi}{2}\leqslant 2\Theta\leqslant\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi\leqslant 2\Theta\leqslant\frac{5}{2}\pi$, откуда $-\frac{\pi}{4}\leqslant\Theta\leqslant\frac{\pi}{4}$; $\frac{3}{4}\pi\leqslant\Theta\leqslant\frac{5}{4}\pi$.

Заметим, что когда Θ изменяется от $-\frac{\pi}{4}$ до $+\frac{\pi}{4}$, то полярный радиус r описывает часть кривой, расположенной в первой и четвертой четвертях, а при изменении Θ от $\frac{3}{4}\pi$ до $\frac{5}{4}\pi$ он описывает часть кривой, расположенной во второй и третьей четвертях. Если к тому же учесть, что период $\cos 2\Theta$ равен π, то при замене Θ на $\Theta+\pi$ (что равносильно повороту полярного радиуса r на угол π) полярный радиус r не изменится, и поэтому кривая симметрична относительно полюса O. Более того, эта кривая симметрична относительно полярной оси, так как для значений Θ, отличающихся только знаком, r не изменяется. Этих соображений уже достаточно для того, чтобы построить всю кривую (см. рис. 170).

Таким образом, вся кривая расположена в двух вертикальных углах между прямыми, проведенными под углами $\Theta=\frac{\pi}{4}$ и $\Theta=\frac{3}{4}\pi$ к полярной оси, и пересекает сама себя в полюсе O.

Перейдем к вычислению площади. Учитывая симметрию кривой относительно полюса и полярной оси, мы можем ограничиться вычислением площади фигуры, находящейся в первой четверти, а это соответствует тому, что $0\leqslant\Theta\leqslant\frac{\pi}{4}$. Следовательно, вся площадь фигуры согласно формуле (12) будет равна

$$P=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\,d\Theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\Theta\,d\Theta=a^2\sin 2\Theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2.$$

Пример 9. Найти площадь кардиоиды (рис. 172) $r=a(1+\cos\Theta)$.

Так как кривая симметрична относительно полярной оси (в силу четности $\cos\Theta$), то достаточно вычислить площадь верхней половины. Эту половину полярный радиус r опишет при изменении Θ от 0 до π. Тогда по формуле (12) находим:

$$P=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}r^2\,d\Theta=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\Theta)^2\,d\Theta=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\Theta+\cos^2\Theta)\,d\Theta=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}\Theta+2\sin\Theta+\frac{\sin 2\Theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

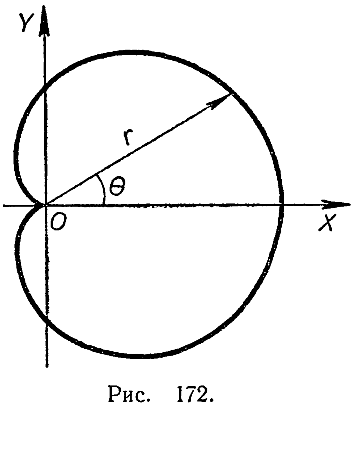


Рис. 172.

Пример 6. Вычислить площадь петли

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}(2-t^2), \\ y=\frac{b}{2}t(t^2-3), \end{cases}$$

где a и b — положительные постоянные.

Из уравнений кривой видно, что областью существования данных функций является промежуток $(-\infty, +\infty)$ и что с изменением только знака параметра t функция x не изменяется, тогда как y лишь изменяет свой знак. Отсюда следует, что данная кривая симметрична относительно оси OX. Найдем те значения параметра t, при которых x и y обращаются в нуль — точки пересечения с осями координат. Для этого сперва положим $x=0$, то есть $2-t^2=0$, отсюда $t=\pm\sqrt{2}$. Подставляя эти значения во второе уравнение, получим две взаимно симметричные точки $y_1=-\frac{b}{\sqrt{2}}$, $y_2=+\frac{b}{\sqrt{2}}$, в которых кривая пересекает ось OY. Затем, полагая $y=0$, найдем: $t=\pm\sqrt{3}$, $t=0$. Подставляя эти значения в первое уравнение, получим две точки $x_1=-\frac{a}{2}$, $x_2=a$ пересечения кривой с осью OX; причем через точку $x_1=-\frac{a}{2}$ кривая проходит дважды при $t=\pm\sqrt{3}$, пересекая самое себя, образуя петлю (рис. 168). Из уравнений кривой следует, что $x\to-\infty$ при $t\to\pm\infty$, а $y\to+\infty$ при $t\to+\infty$ и $y\to-\infty$ при $t\to-\infty$. Отсюда ясно, что кривая имеет две бесконечные ветви: одну — во второй четверти, другую — в третьей.

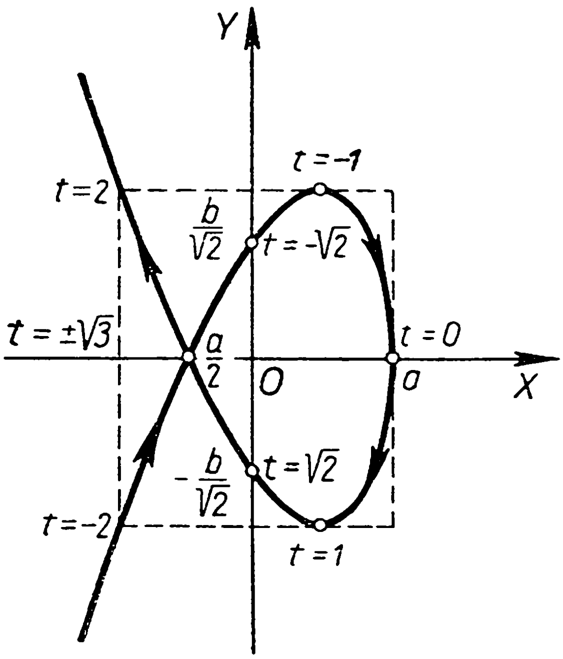


Рис. 168.

Из всего сказанного нетрудно заметить, что при возрастании параметра t от $-\infty$ до $+\infty$ точка M обходит кривую так, как указано стрелкой на рисунке 168; при этом петля обходится по часовой стрелке при возрастании t в промежутке $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$.

Учитывая симметрию фигуры относительно оси OX, достаточно вычислить половину искомой площади и результат удвоить. Найдем, например, площадь верхней части фигуры (над осью OX), которой, как это следует из наших рассуждений, соответствует изменение параметра t от $-\sqrt{3}$ до 0 — это и будут пределы интегрирования. Тогда, учитывая, что $x'_t=-at$, по формуле (10) находим:

$$P=2\int_{-\sqrt{3}}^{0} yx'_t\,dt=2\int_{-\sqrt{3}}^{0}\frac{b}{2}t(t^2-3)(-at)\,dt=$$

$$=ab\int_{-\sqrt{3}}^{0}(3t^2-t^4)\,dt=ab\left(t^3-\frac{1}{5}t^5\right)\Big|_{-\sqrt{3}}^{0}=\frac{6}{5}\sqrt{3}\,ab.$$

Отметим, что если интегрирование производить в пределах от $-\sqrt{3}$ до $+\sqrt{3}$, то формула (10) сразу даст площадь всей петли. Предлагаем в этом убедиться непосредственно.