ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками разбиения $\{x_i\}_{i=1}^n$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b.$$

В каждом из полученных отрезков выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Обозначим длину частичного отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Составим *интегральную сумму* для $f(x)$ на $[a;b]$, соответствующую данному разбиению и выбору промежуточных точек ξ_i

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

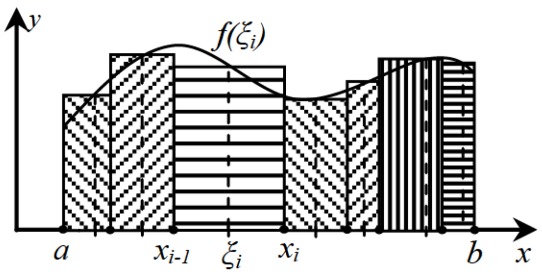

Рис.1.

Геометрический смысл интегральной суммы очевиден: это сумма площадей прямоугольников (рис.1).

Назовем *рангом разбиения* λ - длину наибольшего частичного отрезка разбиения:

$$\lambda = \max\{\Delta x_i\}_{i=1}^n.$$

Определение. *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ по интервалу [a;b] называется предел интегральных сумм S_n при $\lambda \to 0, (n \to \infty)$, если этот предел существует, конечен, не зависит от способа разбиения и выбора точек ξ_i.

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.}$$

Здесь предел при $\lambda \to 0$ понимается в следующем смысле:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon : \ \lambda < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon \text{ при любом выборе точек } \xi_i.$$

Концы интервала $[a;b]$ называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, а функция $f(x)$ – *интегрируемой.*

Геометрический смысл определенного интеграла как площади криволинейной трапеции под графиком $f(x)$ на интервале $[a;b]$ (если $f(x) \geq 0$) следует непосредственно из его определения.