## *Интегрирование иррациональных выражений*

| № | Вид интеграла | Метод интегрирования |
|---|---|---|
| 1 | $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$<br>$a$ = const | Подстановка: $\boldsymbol{x = a\cdot\sin t}$. Тогда $\boldsymbol{dx = a\cdot\cos t\, dt}$<br>$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos\ t$<br>После интегрирования к переменной $\boldsymbol{x}$ можно вернуться по формулам:<br>$t=\arcsin\frac{x}{a},\ \sin t=\frac{x}{a},\ \cos\ t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\ \mathrm{tg}t=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$<br>(Возможна и подстановка $\boldsymbol{x = a\cdot\cos t}$) |
| 2 | $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$<br>$a$ = const | Подстановка: $\boldsymbol{x = a\cdot\mathrm{tg}\, t}$. Тогда $dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$<br>$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2tg^2t}=\frac{a}{\cos\ t}$<br>После интегрирования к переменной $\boldsymbol{x}$ можно вернуться по формулам:<br>$t=\mathrm{arctg}\frac{x}{a},\ \mathrm{tg}t=\frac{x}{a},\ \cos\ t=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}},\ \sin t=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$<br>(Возможна и подстановка $\boldsymbol{x = a\cdot\mathrm{ctg}\, t}$) |
| 3 | $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$<br>$a$ = const | Подстановка: $x=\frac{a}{\cos\ t}$. Тогда $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$<br>$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\,\mathrm{tg}t$<br>После интегрирования к переменной $\boldsymbol{x}$ можно вернуться по формулам:<br>$t=\arccos\frac{a}{x},\ \cos\ t=\frac{a}{x},\ \sin t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},\ \mathrm{tg}t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$<br>(Возможна и подстановка $x=\frac{a}{\sin t}$) |

| № | Вид интеграла | Метод интегрирования |
|---|---|---|
| 4 | $\int R\left(x,x^{\frac{p_1}{q_1}},x^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$<br>$p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n$ – целые числа | Подстановка: $\boldsymbol{x = t^m}$ ,<br>где $\boldsymbol{m}$ – наименьший общий знаменатель дробей<br>$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ \frac{p_n}{q_n}$ |
| 5 | $\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}},(ax+b)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,(ax+b)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$<br>$p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n$ – целые числа,<br>$a, b$ = const | Подстановка: $\boldsymbol{(ax + b) = t^m}$ ,<br>где $\boldsymbol{m}$ – наименьший общий знаменатель дробей<br>$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ \frac{p_n}{q_n}$ |
| 6 | $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$<br>$p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n$ – целые числа<br>$a, b, c, d$ = const | Подстановка: $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$ ,<br>где $\boldsymbol{m}$ – наименьший общий знаменатель дробей<br>$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ \frac{p_n}{q_n}$ |

| № | Вид интеграла | Метод интегрирования |
|---|---|---|
| 7 | $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ <br> $a, b, c$ = const, $a \neq 0$ | ***Подстановки Эйлера*** <br> 1. Если $a > 0$, то подстановка: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$ <br> 2. Если корни трехчлена $x_1$ *и* $x_2$ – действительные числа, то подстановка: $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$ <br> 3. Если $c > 0$, то подстановка: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$ |
| 8 | $\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$, <br> $a, b, c, \lambda, k$ = const | Подстановка: $t = \frac{1}{x-\lambda}$ |
| 9 | $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ <br> $m, n, p, a, b$ = const, <br> $m, n, p \in Q$, $a, b \in R$ | ***Подстановки Чебышева*** <br> 1. Если $p$ – целое число, то подстановка: $z = x^{\frac{n}{s}}$, <br> где $s$ – знаменатель дроби $\frac{m+1}{n}$. <br> 2. Если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то подстановка: $z = (a+bx^n)^{\frac{1}{s}}$, <br> где $s$ – знаменатель дроби $p$. <br> 3. Если $\left(\frac{m+1}{n} + p\right)$ – целое число, то подстановка: $z = (ax^{-n}+b)^{\frac{1}{s}}$, <br> где $s$ – знаменатель дроби $p$. |

## *ПРИМЕРЫ*

***Пример 1.*** $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

Делаем замену $x = 3\sin t$ (мы, в частности, ограничиваем здесь случаи, когда $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$). Получим

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{9\sin^2 t} 3\cos t\, dt = \int \frac{\cos^2 t\, dt}{\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt =$$

$$= -\mathrm{ctg} t - t + C = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{3} + C.$$

***Пример 2***. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Делаем подстановку $x = \mathrm{tg}\,t$ , тогда $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ .

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t\ \mathrm{tg}\,t\ \frac{1}{\cos t}} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2}\right| + C$$

**Пример 3.** Вычислить определенный интеграл

$$\int \frac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)dx}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\sqrt[6]{x^5}}.$$

Решение. Имеем интеграл вида ( 4 ). Показатели степеней – рациональные дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, их наименьший общий знаменатель равен 12. Применим подстановку $x = t^{12}$. Тогда $dx = 12t^{11}dt,\ t = \sqrt[12]{x}$ . Следовательно,

$$\int \frac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)dx}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\sqrt[6]{x^5}} = \int \frac{(1+t^3)12t^{11}dt}{(t^3+t^2)t^{10}} = 12\int \frac{(1+t^3)dt}{t(1+t)} = 12\int \frac{t^2-t+1}{t}dt = 12\int\left(t-1+\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln t\right) + C = 12\left(\frac{\left(\sqrt[12]{x}\right)^2}{2} - \sqrt[12]{x} + \ln\sqrt[12]{x}\right) + C = 6\sqrt[6]{x} - 12\sqrt[12]{x} + \ln x + C.$$

Ответ: $6\sqrt[6]{x} - 12\sqrt[12]{x} + \ln x + C$.

**Пример 4**

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left|\begin{matrix} \sqrt[12]{x-1} = t; x-1 = t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \end{matrix}\right| = \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt =$$

$$= 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right) = 12\left(\int\left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt + \int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) = 12\int t\,dt - 12\int \frac{t\,dt}{t^2+1} +$$

$$+ 12\int dt - 12\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6\ln(t^2+1) - 12arctg(t) + C = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} -$$

$$- 6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1) - 12arctg(\sqrt[12]{x-1}) + C;$$

**Пример 5**

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \left|\begin{array}{l} \text{здесь } p=\frac{1}{3}\notin Z, \frac{m+1}{n}=2\in Z \\ \text{поэтому применим подстановку} \\ 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3; x=\left(t^3-1\right)^4; dx=4\left(t^3-1\right)^3 3t^2dt \end{array}\right| =$$

$$= \int \left(t^3-1\right)^{-2} t\cdot 4\left(t^3-1\right)^3 3t^2dt = 12\int t^3\left(t^3-1\right)dt = 12\int\left(t^6-t^3\right)dt = 12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = ;$$

$$= \frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C$$