

## Интегрирование тригонометрических выражений

№	Вид интеграла	Метод интегрирования
1	$\int R(\sin x, \cos x) dx$ <p><math>R</math> означает, что над <math>\sin x</math> и <math>\cos x</math> производятся действия: сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в целую степень</p>	<p style="text-align: center;"><u>Универсальная подстановка</u></p> $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$ $x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ <p style="text-align: center;"><u>Частные случаи</u></p> <p>а) Если выражение <math>R</math> меняет знак при замене <math>\sin x</math> на <math>(-\sin x)</math>, т.е. <math>R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)</math>, то подстановка <math>t = \cos x</math></p> <p>б) Если выражение <math>R</math> меняет знак при замене <math>\cos x</math> на <math>(-\cos x)</math>, т.е. <math>R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)</math>, то подстановка <math>t = \sin x</math></p> <p>в) Выражение <math>R</math> не меняется при замене одновременно <math>\sin x</math> на <math>(-\sin x)</math> и <math>\cos x</math> на <math>(-\cos x)</math>, т.е. <math>R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)</math>, то подстановка <math>t = \operatorname{tg} x</math></p>
2	<p>а) <math>\int R(\sin x) \cdot \cos x dx</math></p> <p>б) <math>\int R(\cos x) \cdot \sin x dx</math></p>	<p>а) Подвести функцию <math>\cos x</math> под знак дифференциала: <math>\cos x dx = d(\sin x)</math>, можно сделать замену переменной <math>\sin x = t</math></p> <p>б) Подвести функцию <math>\sin x</math> под знак дифференциала: <math>\sin x dx = -d(\cos x)</math> можно сделать замену переменной <math>\cos x = t</math></p>
3	$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ <p><math>m, n</math> – целые неотрицательные числа</p>	<p>а) Если <math>m</math> – нечётное, то подстановка <math>t = \cos x</math>, тогда <math>dt = -\sin x dx</math> Оставшуюся функцию <math>\sin x</math> в чётной степени выразить через <math>\cos x</math> по формуле: <math>(\sin^2 x)^n = (1 - \cos^2 x)^n</math></p> <p>б) Если <math>n</math> – нечётное, то подстановка <math>t = \sin x</math>, тогда <math>dt = \cos x dx</math> Оставшуюся функцию <math>\cos x</math> в чётной степени выразить через <math>\sin x</math> по формуле: <math>(\cos^2 x)^n = (1 - \sin^2 x)^n</math></p> <p>в) Если <math>m</math> и <math>n</math> чётные, то применяются формулы понижения степени: <math>(\sin^2 x)^n = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^n, \quad (\cos^2 x)^n = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^n</math> <math>(2 \sin x \cdot \cos x)^n = (\sin 2x)^n</math></p>
4	$\int \frac{\sin^{2m} x}{\cos^{2n} x} dx, \quad \int \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2m} x} dx$ <p><math>m, n</math> – натуральные числа</p>	<p>Подстановка <math>t = \operatorname{tg} x</math>, отсюда получаем:</p> $x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$
5	$\int \sin mx \cdot \cos nx dx$ $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$ $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$	<p>Использовать формулы:</p> $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$ $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
6	$\int \frac{dx}{\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x}$ <p><math>m, n</math> – натуральные числа</p>	<p>В числителе целесообразно вводить «тригонометрическую единицу»</p> $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ <p>в подходящей степени</p>

## ПРИМЕРЫ

### Пример 1.

$$\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} = \left| \begin{array}{l} \text{Используем универсальную подстановку (Случай 1)} \\ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, x = 2 \operatorname{arctg} t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{5 - 4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{\frac{5(1+t^2) - 4 \cdot 2t + 3 \cdot (1-t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{5(1+t^2) - 4 \cdot 2t + 3 \cdot (1-t^2)} = \int \frac{2dt}{5 + 5t^2 - 8t + 3 - 3t^2} = \int \frac{2dt}{2t^2 - 8t + 8} = \int \frac{2dt}{2(t^2 - 4t + 4)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{(t-2)} + C = \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C$$

### Пример 2.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x dx}{\cos^4 x} = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx}{\cos^4 x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos x, \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{t^4} dt = \int \frac{t^2-1}{t^4} dt = \int \left( \frac{t^2}{t^4} - \frac{1}{t^4} \right) dt = \int (t^{-2} - t^{-4}) dt = \frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

### Пример 3.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 + \sin^4 x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t dt}{1 + t^4} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Подстановка } u = t^2, \\ \text{тогда } du = (t^2)' dt = 2t dt. \\ \text{Интеграл умножим и разделим на 2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{1 + (t^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t^2 + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C.$$

**Пример 4.**

$$\int \sin^5 x \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Это Случай 3, пункт а: } m = 5 \text{ (нечётное), } n = 0. \\ \text{Подстановка } t = \cos x, \, dt = (\cos x)' \, dx = -\sin x \, dx \end{array} \right| = \int \sin^4 x \cdot \sin x \, dx =$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx = -\int (1 - t^2)^2 \, dt = -\int (1 - 2t^2 + t^4) \, dt =$$

$$= -t + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

**Пример 5.**

$$\int \sin^4 x \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Это случай 3, пункт в: } m = 4, n = 0 \text{ (оба чётные).} \\ (\sin^2 x)^n = \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^n \end{array} \right| = \int \frac{1}{2^2} (1 - \cos 2x)^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx$$

$$= \left| (\cos^2 x)^n = \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^n \right| = \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx = \frac{1}{4} x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C =$$

$$= \frac{3}{8} x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

**Пример 6.**

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Это Случай 4. Подстановка: } t = \operatorname{tg} x, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\left( \frac{1}{1+t^2} \right)^2} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{(1+t^2)^2}{1} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$