

### Метод Остроградского

Правильные рациональные дроби можно интегрировать ещё и методом Остроградского. Этот метод основан на формуле, полученной М. В. Остроградским:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (6.3)$$

$$\text{где } Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_i)^{k_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{s_j}, \quad (6.4)$$

$$Q_1(x) = (x - \alpha_1)^{k_1-1} \dots (x - \alpha_i)^{k_i-1} (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1-1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{s_j-1}, \quad (6.5)$$

$$Q_2(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_i) (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_jx + q_j), \quad (6.6)$$

$P_1(x)$  – многочлен с неопределёнными коэффициентами степени на единицу меньше, чем  $Q_1(x)$ ,

$P_2(x)$  – многочлен с неопределёнными коэффициентами степени на единицу меньше, чем  $Q_2(x)$ ,

$\alpha_1, \dots, \alpha_i, p_1, q_1, \dots, p_j, q_j$  – действительные числа, квадратные трёхчлены  $x^2 + p_t x + q_t$  не имеют действительных корней ( $t = 1, 2, \dots, j$ ),  $k_1, \dots, k_i, s_1, \dots, s_j$  – натуральные числа,  $k_1 + \dots + k_i + 2s_1 + \dots + 2s_j = m$ ,

**Интегрирование методом Остроградского включает следующие операции:**

1. Если знаменатель  $Q(x)$  правильной рациональной дроби разложен на произведение простых множителей (6.4), то по формулам (6.5), (6.6) составить  $Q_1(x)$  и  $Q_2(x)$ .

Если знаменатель  $Q(x)$  правильной рациональной дроби не разложен на произведение простых множителей, то многочлен  $Q_1(x)$  можно найти как наибольший общий делитель ( $D$ ) многочленов  $Q(x)$  и  $Q'(x)$ :

$$Q_1(x) = D(Q(x); Q'(x)), \quad (6.7)$$

где  $Q'(x)$  – производная функции  $Q(x)$ .

Для нахождения  $D(Q(x); Q'(x))$  можно воспользоваться алгоритмом Евклида.

После того, как найдено  $Q_1(x)$ , можно найти  $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$ , разделив «столбиком»

многочлен  $Q(x)$  на  $Q_1(x)$ .

2. При составлении многочленов с неопределёнными коэффициентами  $P_1(x)$ , и  $P_2(x)$ , которые имеют степень, на единицу меньшую, чем степень  $Q_1(x)$  и  $Q_2(x)$  соответственно, можно воспользоваться таблицей 6.3.

**Многочлены с неопределёнными коэффициентами**

$A, B, C, D, E \dots$  – неопределённые коэффициенты

Степень многочлена, $n$	Общий вид многочлена с неопределёнными коэффициентами
0	$P(x) = A$
1	$P(x) = Ax + B$
2	$P(x) = Ax^2 + Bx + C$
3	$P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
4	$P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$
...	...

3. Воспользоваться формулой Остроградского (6.3).
4. Продифференцировать составленное уравнение (6.3):

$$\left( \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \right)' = \left( \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \right)',$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(P_1(x))' \cdot Q_1(x) - (Q_1(x))' \cdot P_1(x)}{(Q_1(x))^2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \quad (6.8)$$

5. Привести все дроби к общему знаменателю и приравнять числители левой и правой частей уравнения.
6. Найти неопределённые коэффициенты методом сравнений: приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , стоящие в левой и правой частях уравнения; а затем решить полученную систему линейных уравнений.
7. Подставить найденные значения коэффициентов в формулу Остроградского и найти

$$\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx.$$

## Пример

$$\int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx$$

1. Дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2}$  – правильная, так как степень числителя ( $n = 6$ )

меньше степени знаменателя ( $m = 3 + 2 \cdot 2 = 7$ ).

Знаменатель дроби разложен на простые множители:  $Q(x) = x^3(x^2 + 1)^2$ .

Тогда по формуле (6.5)  $Q_1(x) = x^2(x^2 + 1)$ , по формуле (6.6)  $Q_2(x) = x(x^2 + 1)$ .

2. Так как  $Q_1(x)$  – многочлен степени  $2 + 2 = 4$ , то  $P_1(x)$  – многочлен степени 3.

Так как  $Q_2(x)$  – многочлен степени  $1 + 2 = 3$ , то  $P_2(x)$  – многочлен степени 2.

Составим многочлены  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  с неопределёнными коэффициентами, пользуясь таблицей 6.3.

$$P_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad P_2(x) = Ex^2 + Fx + G.$$

3. Воспользуемся формулой Остроградского (6.3).

$$\int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^2(x^2 + 1)} + \int \frac{Ex^2 + Fx + G}{x(x^2 + 1)} dx.$$

4. Дифференцируем составленное уравнение, пользуясь формулой (6.8)

$$\begin{aligned} \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} &= \\ &= \frac{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' x^2(x^2 + 1) - (x^4 + x^2)' (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}{(x^2(x^2 + 1))^2} + \frac{Ex^2 + Fx + G}{x(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} &= \\ &= \frac{(3Ax^2 + 2Bx + C)x^2(x^2 + 1) - (4x^3 + 2x)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}{x^4(x^2 + 1)^2} + \frac{Ex^2 + Fx + G}{x(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Первую дробь правой части уравнения сократим на  $x$ .

$$\frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} = \frac{(3Ax^2 + 2Bx + C)x(x^2 + 1) - (4x^2 + 2) \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}{x^3(x^2 + 1)^2} + \frac{Ex^2 + Fx + G}{x(x^2 + 1)}.$$

5. Приведём все дроби к общему знаменателю  $x^3(x^2 + 1)^2$  и приравняем числители левой и правой частей уравнения.

$$\frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} = \frac{(3Ax^2 + 2Bx + C) \cdot (x^3 + x) - (4x^2 + 2) \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}{x^3(x^2 + 1)^2} + \frac{(Ex^2 + Fx + G)x^2(x^2 + 1)}{x^3(x^2 + 1)^2}.$$

$$x^6 + x^4 - 4x^2 - 2 = (3Ax^2 + 2Bx + C) \cdot (x^3 + x) - (4x^2 + 2) \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + (Ex^2 + Fx + G)(x^4 + x^2).$$

$$x^6 + x^4 - 4x^2 - 2 = (3Ax^5 + 2Bx^4 + Cx^3 + 3Ax^3 + 2Bx^2 + Cx) - (4Ax^5 + 2Ax^3 + 4Bx^4 + 2Bx^2 + 4Cx^3 + 2Cx + 4Dx^2 + 2D) + (Ex^6 + Ex^4 + Fx^5 + Fx^3 + Gx^4 + Gx^2).$$

6. Найдём неопределённые коэффициенты методом сравнений. Для этого приравняем коэффициенты уравнения при одинаковых степенях  $x$ .

$$\begin{array}{l|l} x^6 & E = 1, \\ x^5 & 3A - 4A + F = 0, \\ x^4 & 2B - 4B + E + G = 1, \\ x^3 & C + 3A - 2A - 4C + F = 0, \\ x^2 & 2B - 2B - 4D + G = -4, \\ x & C - 2C = 0, \\ x^0 & -2D = -2. \end{array}$$

Получили систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} E = 1, \\ -A + F = 0, \\ -2B + E + G = 1, \\ A - 3C + F = 0, \\ -4D + G = -4, \\ C = 0, \\ D = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Подставим найденные} \\ \text{значения } C = 0, D = 1, E = 1 \\ \text{в II - IV уравнения системы} \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} -A + F = 0, \\ -2B + 1 + G = 1, \\ A + 0 + F = 0, \\ -4 + G = -4. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{К третьему уравнению} \\ \text{прибавим первое} \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} A = F, \\ 2B = G, \\ 2F = 0, \\ G = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \\ F = 0, \\ G = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

7. Подставим найденные значения коэффициентов в уравнение, полученное в пункте 3 решения.

$$\int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{x^2(x^2 + 1)} + \int \frac{x^2}{x(x^2 + 1)} dx.$$

Найдём интеграл, стоящий в правой части уравнения.

$$\int \frac{x^2}{x(x^2 + 1)} dx = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \left. \begin{array}{l} \text{Подстановка } t = x^2 + 1, \\ \text{тогда } dt = (x^2 + 1)' dx = 2x dx. \\ \text{Интеграл умножим и разделим на 2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C.$$

Таким образом, получили: 
$$\int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{x^2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C.$$