

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ.

Рациональной дробью называется выражение, заданное в виде отношения

двух многочленов:
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad (6.1)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены переменной x степени n и m соответственно,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$ – постоянные коэффициенты (действительные числа), $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.

Если $n < m$ (степень числителя меньше степени знаменателя),	то дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная
Если $n \geq m$ (степень числителя больше или равна степени знаменателя),	то дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – неправильная

Простейшими рациональными дробями называются дроби следующих четырёх видов:

1. $\frac{A}{x-a}$	2. $\frac{A}{(x-a)^k}$	3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$	4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}$
--------------------	------------------------	----------------------------	--------------------------------

где A, M, N, p, q, k, s – постоянные величины, причём:

k, s – натуральные числа, большие единицы,

A, M, N, p, q – действительные числа,

$q - \frac{p^2}{4} > 0$ (это значит, что квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней).

Интегралы от простейших рациональных дробей

№	Вид дроби	Интегрирование
1	$\frac{A}{x-a}$	$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln x-a + C$
2	$\frac{A}{(x-a)^k}$	$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$

3	$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$	$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln x^2 + px + q + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$
4	$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^s}$	$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = -\frac{M}{2(s-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^s} + C$ Для нахождения последнего интеграла используем рекуррентную формулу (5.2) модуля 5

Интегрирование рациональных дробей включает следующие операции:

1. Проверить, является ли дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ правильной. Если дробь неправильная ($n \geq m$), то представить ее в виде суммы некоторого многочлена (целой части) и правильной дроби, разделив числитель неправильной дроби на знаменатель:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = G_{n-m}(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}, \quad (6.2)$$

где n, m – натуральные числа, $n \geq m$,

l – неотрицательное число, $l < m$,

$P_n(x), Q_m(x), G_{n-m}(x), R_l(x)$ – многочлены переменной x степени $n, m, n - m, l$ соответственно,

$G_{n-m}(x)$ – целая часть,

$R_l(x)$ – остаток от деления.

2. Разложить знаменатель правильной рациональной дроби на простейшие множители:

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 =$$

$$= b_m (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_i)^{k_i} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \dots (x^2 + p_j x + q_j)^{s_j},$$

где α_1 – действительный корень знаменателя кратности k_1 ,

α_2 – действительный корень знаменателя кратности k_2 ,

.....

α_i – действительный корень знаменателя кратности k_i ,

$p_t^2 - 4q_t < 0$, т.е. квадратные трёхчлены $x^2 + p_t x + q_t$ не имеют действительных корней ($t = 1, 2, \dots, j$),

$k_1, k_2, \dots, k_i, s_1, s_2, \dots, s_j$ – натуральные числа,

$k_1 + k_2 + \dots + k_i + 2s_1 + 2s_2 + \dots + 2s_j = m$.

3. Представить правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами. В этом разложении каждому множителю знаменателя дроби соответствует одно или несколько слагаемых.

Слагаемые в разложении правильной рациональной дроби на простейшие дроби

$A, A_1, A_2, \dots, A_k, M, N, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_s, N_s$ – неопределенные коэффициенты.

Множитель знаменателя	Соответствующие слагаемые простейшей дроби
$x - a$	$\frac{A}{x - a}$
$(x - a)^k$	$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$
$x^2 + px + q$	$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$
$(x^2 + px + q)^s$	$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_sx + N_s}{(x^2 + px + q)^s}$

4. Привести простейшие дроби к общему знаменателю и приравнять числители правильной дроби и полученной дроби.

5. Найти неопределенные коэффициенты одним из следующих трёх методов.

а) **метод частных значений** основан на следующем: если многочлены равны, то они равны при любых значениях переменной x .

Чтобы найти коэффициенты этим методом, нужно в полученное в пункте 4 равенство подставить вместо x любое число, в результате получим уравнение. Эту операцию необходимо проделать столько раз, каково число определяемых коэффициентов. А затем решить полученную систему линейных уравнений с неизвестными коэффициентами.

Замечание!

Этот метод удобно применять, если все простейшие дроби в разложении относятся к первому виду. В качестве значений x рекомендуется брать корни знаменателей простейших дробей.

б) **метод сравнений** основан на следующем: если многочлены равны, то равны их коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x .

Поэтому, чтобы найти коэффициенты этим методом, нужно приравнять коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x , а затем решить полученную систему линейных уравнений с неизвестными коэффициентами.

в) **комбинированный метод** заключается в том, что часть коэффициентов находится методом частных решений, а часть – методом сравнения.

6. Подставить найденные значения коэффициентов в дроби и найти интегралы.

ПРИМЕРЫ

Пример 1.

$$\int \frac{4x^2 - 47x + 108}{x^3 - 12x^2 + 36x} dx$$

$$\frac{4x^2 - 47x + 108}{x^3 - 12x^2 + 36x} = \frac{4x^2 - 47x + 108}{x(x-6)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-6} + \frac{C}{(x-6)^2}, \quad (*)$$

где A, B, C – неопределённые коэффициенты.

Приведём простейшие дроби к общему знаменателю и приравняем числители исходной дроби и полученной дроби.

$$\frac{4x^2 - 47x + 108}{x^3 - 12x^2 + 36x} = \frac{A(x-6)^2 + Bx(x-6) + Cx}{x(x-6)^2}.$$

$$4x^2 - 47x + 108 = A(x-6)^2 + Bx(x-6) + Cx. \quad (**)$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов используем *комбинированный метод*.

Метод частных значений:

а) $x = 0$ является корнем знаменателя.

Подставим это значение в уравнение (**) вместо x :

$$108 = 36A,$$

$$A = 3.$$

б) $x = 6$ является корнем знаменателя.

Подставим это значение в уравнение (**) вместо x :

$$-30 = 6C,$$

$$C = -5.$$

Метод сравнений:

Для того, чтобы найти значение коэффициента B достаточно одного уравнения.

Приравняем коэффициенты при x^2 в равенстве (**).

$$x^2 | A + B = 4$$

Подставим в это уравнение ранее найденное значение $A = 3$.

$$3 + B = 4, \quad B = 1.$$

$$\int \frac{4x^2 - 47x + 108}{x^3 - 12x^2 + 36x} dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x-6} - \frac{5}{(x-6)^2} \right) dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{x-6} dx - \int \frac{5}{(x-6)^2} dx =$$

$$= 3 \ln|x| + \ln|x-6| + \frac{5}{x-6} + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{x^2 - 15x + 27}{x^3 + 27} dx$$
$$\frac{x^2 - 15x + 27}{x^3 + 27} = \frac{x^2 - 15x + 27}{(x+3)(x^2 - 3x + 9)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2 - 3x + 9}, \quad (*)$$

где A, B, C – неопределённые коэффициенты.

Приведём простейшие дроби к общему знаменателю и приравняем числители исходной дроби и полученной дроби.

$$\frac{x^2 - 15x + 27}{x^3 + 27} = \frac{A(x^2 - 3x + 9) + (Bx + C)(x + 3)}{(x + 3)(x^2 - 3x + 9)}.$$

$$x^2 - 15x + 27 = A(x^2 - 3x + 9) + (Bx + C)(x + 3). \quad (**)$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов используем *комбинированный метод*.

Метод частных значений:

$x = -3$ является корнем знаменателя.

Подставим это значение в уравнение (**), вместо x :

$$81 = 27A,$$

$$A = 3.$$

Метод сравнений:

Для того, чтобы найти значение коэффициентов B и C достаточно двух уравнений. Приравняем коэффициенты при x^2 и x^0 в равенстве (**).

$$x^2 \mid A + B = 1,$$

$$x^0 \mid 9A + 3C = 27$$

Подставим в эту систему уравнений ранее найденное значение $A = 3$.

$$\begin{cases} 3 + B = 1, \\ 9 \cdot 3 + 3C = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -2, \\ C = 0. \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2 - 15x + 27}{x^3 + 27} dx = \int \left(\frac{3}{x+3} - \frac{2x}{x^2 - 3x + 9} \right) dx = \int \frac{3}{x+3} dx - \int \frac{2x}{x^2 - 3x + 9} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Во втором интеграле преобразуем квадратный трёхчлен (случай 1 таблицы 4.1 модуля 4)} \\ = x^2 - 3x + 9 = (x^2 - 3x) + 9 = \left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 9 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{27}{4}, \\ t = x - \frac{3}{2}, \text{ отсюда } x = t + \frac{3}{2}, dx = dt, \text{ тогда } x^2 - 3x + 9 = t^2 + \frac{27}{4} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{3}{x+3} dx - \int \frac{2\left(t + \frac{3}{2}\right)}{t^2 + \frac{27}{4}} dt = \int \frac{3}{x+3} dx - \int \frac{2t+3}{t^2 + \frac{27}{4}} dt = \\
&= \int \frac{3}{x+3} dx - \int \frac{2tdt}{t^2 + \frac{27}{4}} - 3 \int \frac{dt}{t^2 + \frac{27}{4}} = \left. \begin{array}{l} \text{Для II интеграла подстановка:} \\ u = t^2 + \frac{27}{4}, \text{ тогда } du = \left(t^2 + \frac{27}{4}\right)' dt = 2tdt. \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{3}{x+3} dx - \int \frac{du}{u} - 3 \int \frac{dt}{t^2 + \frac{27}{4}} = 3 \ln|x+3| - \ln|u| - 3 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}/2} \operatorname{arctg} \frac{t}{3\sqrt{3}/2} + C = \\
&= 3 \ln|x+3| - \ln \left| t^2 + \frac{27}{4} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{3\sqrt{3}} + C = \\
&= 3 \ln|x+3| - \ln|x^2 - 3x + 9| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)}{3\sqrt{3}} + C = \\
&= 3 \ln|x+3| - \ln|x^2 - 3x + 9| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{3\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

Пример 3.

$$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx$$

Дробь $\frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)}$ — неправильная.

$$x(x+4)(x-2) = x(x^2 + 4x - 2x - 8) = x(x^2 + 2x - 8) = x^3 + 2x^2 - 8x.$$

Разделим числитель дроби на знаменатель.

$$\begin{array}{r}
2x^3 - 40x - 8 \\
\underline{2x^3 + 4x^2 - 16x} \\
-2x^2 - 24x - 8
\end{array} \quad \begin{array}{r}
x^3 + 2x^2 - 8x \\
\underline{} \\
2
\end{array}$$

$$\text{Таким образом, } \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} = 2 + \frac{-4x^2 - 24x - 8}{x^3 + 2x^2 - 8x}.$$

Дробь $\frac{-4x^2 - 24x - 8}{x^3 + 2x^2 - 8x}$ — правильная.

$$\frac{-4x^2 - 24x - 8}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2}, \quad (*)$$

где A, B, C — неопределённые коэффициенты.

Приведём простейшие дроби к общему знаменателю и приравняем числители исходной дроби и полученной дроби.

$$\frac{-4x^2 - 24x - 8}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A(x+4)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+4)}{x(x+4)(x-2)}.$$

$$-4x^2 - 24x - 8 = A(x+4)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+4). \quad (**)$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов в данном случае (согласно Замечанию) удобно воспользоваться *методом частных значений*.

а) $x = 0$ является корнем знаменателя дроби.

Подставим это значение в уравнение (**), вместо x :

$$-8 = -8A,$$

$$A = 1.$$

б) $x = -4$ является корнем знаменателя дроби.

Подставим это значение в уравнение (**), вместо x :

$$24 = 24B,$$

$$B = 1.$$

в) $x = 2$ является корнем знаменателя дроби.

Подставим это значение в уравнение (**), вместо x :

$$-72 = 12C,$$

$$C = -6.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx &= \int \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} - \frac{6}{x-2} \right) dx = 2 \int dx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+4} - \int \frac{6}{x-2} dx = \\ &= 2x + \ln|x| + \ln|x+4| - 6\ln|x-2| + C. \end{aligned}$$