МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Формула интегрирования по частям: $\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$

Метод интегрирования по частям включает следующие операции:

1. Разбить подынтегральное выражение на две части: ***u*** и ***dv***.
   (За ***u*** следует принимать такую функцию, которая после дифференцирования не усложняется, а за ***dv*** – такое выражение, интеграл которого можно найти.)
2. Найти ***du*** и ***v*** по формулам: $\boxed{\boldsymbol{du = u'dx}}$, $\boxed{\boldsymbol{v = \int dv}}$.
   (При нахождении ***v*** произвольная постоянная ***C***=0)
3. Применить формулу интегрирования по частям, т.е. заменить исходный интеграл $\int u dv$ на разность $uv - \int v du$.

Некоторые классы функций, интегрируемых по частям

a, k, b, m – const, $P_n(x)$ – многочлен степени n от переменной x,

т.е. $P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0$,

где $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_2, A_1, A_0$ – const, $n \in N$, $A_n \neq 0$

Классы	Интегралы	Рекомендуемое разбиение
I класс	$\int P_n(x)e^{ax+b}dx$ $\int P_n(x)a^{kx+b}dx$ $\int P_n(x)\cos(ax+b)dx$ $\int P_n(x)\sin(ax+b)dx$	***u = P*** $\boldsymbol{u = P_n(x)}$, ***dv*** – остальное подынтегральное выражение
II класс	$\int P_n(x)\ln^m xdx$ $\int P_n(x)\arcsin xdx$ $\int P_n(x)\arccos xdx$ $\int P_n(x)\operatorname{arctg} xdx$ $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} xdx$	$\boldsymbol{dv = P_n(x)dx}$, ***u*** – остальное подынтегральное выражение
III класс (возвратные интегралы)	$\int P_n(x)e^{ax}\cos bxdx$ $\int P_n(x)e^{ax}\sin bxdx$ $\int P_n(x)a^{kx}\cos bxdx$ $\int P_n(x)a^{kx}\sin bxdx$	Разбиение произвольное, но при повторном интегрировании за ***u*** следует брать функцию того же типа. Интеграл возвращается к исходному, а потом решается уравнение

***Замечание* 1**

Метод интегрирования по частям может применяться и при нахождении интегралов других видов, например, $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$, $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ $(a = \text{const})$ и др.

Дополнительная таблица интегралов

1. $\int e^{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C$
2. $\int \sin(ax+b)dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
3. $\int \cos(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

Некоторые примеры многочленов $P_n(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0$, *где* $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_2, A_1, A_0$ – *const*, $n \in N$, $A_n \neq 0$

Степень многочлена, n	Общий вид многочлена $P_n(x)$
0	$P_0(x) = A_0$
1	$P_1(x) = A_1x + A_0$
2	$P_2(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$
3	$P_3(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$
…	…

Замечание 2

В некоторых случаях формулу интегрирования по частям при нахождении интеграла требуется применять несколько раз.

Замечание 3

Иногда, прежде чем применить метод интегрирования по частям, необходимо выполнить замену переменной.

ПРИМЕРЫ

Пример 1.

$$\int (3x-2)e^{7x}dx = \left| \begin{array}{l|l} \text{I класс. Разбиение:} & \\ u = 3x-2 & du = (3x-2)'\,dx = 3dx \\ dv = e^{7x}dx & v = \int e^{7x}dx = \dfrac{1}{7}e^{7x} \end{array} \right| =$$

$$=(3x-2)\cdot\frac{1}{7}e^{7x} - \int \frac{1}{7}e^{7x}\cdot 3dx = \frac{1}{7}(3x-2)e^{7x} - \frac{3}{7}\int e^{7x}dx = \frac{1}{7}(3x-2)e^{7x} - \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{7}e^{7x} + C =$$

$$= 49e^{7x}(7\cdot 3x - 7\cdot 2 - 3) + C = 49e^{7x}(21x-17) + C.$$

Пример 2.

$$\int\left(x^{2}+2\right)\ln x dx = \left|\begin{array}{l}\text{II класс. Разбиение:}\\ \begin{array}{l|l} u=\ln x & du=(\ln x)'\,dx=\dfrac{dx}{x}\\ dv=\left(x^{2}+2\right)dx & v=\int\left(x^{2}+2\right)dx=\dfrac{x^{3}}{3}+2x\end{array}\end{array}\right| =$$

$$=\left(\frac{x^{3}}{3}+2x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^{3}}{3}+2x\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{x^{3}}{3}+2x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^{2}}{3}+2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^{3}}{3}+2x\right)\ln x-\frac{x^{3}}{9}-2x+C.$$

Пример 3.

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \left|\begin{array}{l}\text{II класс. Разбиение:}\\ \begin{array}{l|l} u=\operatorname{arctg} x & du=(\operatorname{arctg} x)'\,dx=\dfrac{dx}{1+x^{2}}\\ dv=dx & v=\int dx=x\end{array}\end{array}\right| = x\operatorname{arctg} x-\int\frac{xdx}{1+x^{2}}=$$

$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^{2}\right)}{1+x^{2}}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^{2}\right|+C.$$

Пример 4.

$$\int e^{3x}\cos 4x dx = \left|\begin{array}{l}\text{III класс. Разбиение:}\\ \begin{array}{l|l} u=\cos 4x & du=(\cos 4x)'\,dx=-4\sin 4x dx\\ dv=e^{3x}dx & v=\int e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{array}\end{array}\right| =$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x-\int\frac{1}{3}e^{3x}\left(-4\sin 4x\right)dx=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x+\frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x dx=$$

$$= \left| \begin{array}{l|l} \text{III класс. Разбиение:} & \\ u = \sin 4x & du = (\sin 4x)'\,dx = 4\cos 4x dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \right.$$

$$\left. - \int \frac{1}{3}e^{3x} 4\cos 4x dx \right) = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x dx .$$

Обозначим $I = \int e^{3x}\cos 4x dx$. Получили уравнение с неизвестным I:

$$I = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x - \frac{16}{9}I ,$$

$$I + \frac{16}{9}I = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x ,$$

$$\frac{25}{9}I = \frac{1}{9}e^{3x}\left(3\cos 4x + 4\sin 4x\right),$$

$$I = \frac{1}{25}e^{3x}\left(3\cos 4x + 4\sin 4x\right),$$

Получаем, $\int e^{3x}\cos 4x dx = \frac{1}{25}e^{3x}\left(3\cos 4x + 4\sin 4x\right) + C$.

Метод интегрирования по частям позволяет получить **рекуррентную формулу:**

$$\boxed{\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}}\right)}$$