ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОЛНОГО КВАДРАТА В ЗНАМЕНАТЕЛЕ

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx, \qquad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \qquad (A,\ B,\ a,\ b,\ c - \text{const},\ a \neq 0)$$

***Интегрирование методом выделения полного квадрата в знаменателе включает следующие операции*:**

1. Выделить полный квадрат трёхчлена $ax^2 + bx + c$, используя формулу сокращённого умножения: $(m^2 \pm 2mn + n^2) = (m \pm n)^2$.
2. Ввести новую переменную t, обозначив выделенный квадрат как t^2.
3. Выразить переменную x через новую переменную t.
4. Найти дифференциал dx.
5. Выполнить замену переменных под знаком интеграла.
6. Представить полученный интеграл в виде суммы двух интегралов, разбив подынтегральную дробь на две дроби.
7. Применить метод непосредственного интегрирования или метод подведения функции под знак дифференциала.

Преобразование квадратного трехчлена

Случай 1. $a = 1$	$x^2+bx+c=\left(x^2+bx\right)+c=\left(x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}$; $t=x+\frac{b}{2}$, отсюда $x=t-\frac{b}{2}$, $dx=dt$. Тогда получаем: $x^2+bx+c=t^2+\frac{4c-b^2}{4}$.

Замечание!

Если перед $\boldsymbol{x^2}$ стоит коэффициент, не являющийся квадратом целого числа ($a \neq \pm k^2$, $k \in N$), то удобнее все коэффициенты трёхчлена умножить и разделить на учетверённый коэффициент при $\boldsymbol{x^2}$, чтобы избежать дробных коэффициентов:

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abx+4ac\right)=\frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac\right)=$$

$$=\frac{1}{4a}\left(\left(2ax+b\right)^2-b^2+4ac\right).$$

ПРИМЕРЫ

Пример 1.

$$\int \frac{3x-5}{x^2-6x+40}dx = \left| \begin{array}{l} x^2-6x+40=\left(x^2-6x\right)+40=\left(x^2-6x+3^2\right)-3^2+40=\left(x-3\right)^2+31, \\ t=x-3, \text{ отсюда } x=t+3, \; dx=dt, \text{ тогда } x^2-6x+40=t^2+31 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3\left(t+3\right)-5}{t^2+31}dt = \int \frac{3t+4}{t^2+31}dt = \int \left(\frac{3t}{t^2+31} + \frac{4}{t^2+31} \right) dt = 3\int \frac{tdt}{t^2+31} + 4\int \frac{dt}{t^2+31} =$$

$$= 3\int \frac{\frac{1}{2}d\left(t^2+31\right)}{t^2+31} + 4\int \frac{dt}{t^2+31} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+31\right)}{t^2+31} + 4\int \frac{dt}{t^2+\sqrt{31}} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|t^2+31\right| + \frac{4}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{31}} + C = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+40\right| + \frac{4}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{31}} + C .$$

Пример 2.

$$\int \frac{x}{2x^2+8x-5}dx = \left| \begin{array}{l} \text{Воспользуемся } \textit{Замечанием}\text{, учитывая, что } a=2, \; 4a=8, b=8: \\ 2x^2+8x-5=\frac{1}{8}\left(8\cdot 2x^2+8\cdot 8x-8\cdot 5\right)=\frac{1}{8}\left(16x^2+64x-40\right)= \\ =\frac{1}{8}\left(16x^2+64x+64-64-40\right)=\frac{1}{8}\left(\left(4x+8\right)^2-104\right). \\ \text{Обозначим } t=4x+8, \text{отсюда } 4x=t-8, \\ x=\frac{1}{4}t-2, \; dx=\frac{1}{4}dt, \text{ тогда } 2x^2+8x-5=\frac{1}{8}\left(t^2-104\right) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}t-2}{\frac{1}{8}\left(t^2-104\right)} \cdot \frac{1}{4}dt = \int \frac{\frac{1}{2}t-4}{\left(t^2-104\right)}dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}t}{t^2-104} - \frac{4}{t^2-104} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t^2-104} - 4\int \frac{dt}{t^2-104} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(t^2-104\right)}{t^2-104} - 4\int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{104}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|t^2-104\right| - \frac{4}{2\sqrt{104}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{104}}{t+\sqrt{104}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|8\cdot\left(2x^2+8x-5\right)\right| - \frac{2}{\sqrt{104}}\ln\left|\frac{4x+8-\sqrt{104}}{4x+8+\sqrt{104}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln 8 + \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+8x-5\right| - \frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{26}}\ln\left|\frac{4x+8-\sqrt{4}\sqrt{26}}{4x+8+\sqrt{4}\sqrt{26}}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+8x-5\right| -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{26}}\ln\left|\frac{2\left(2x+4-\sqrt{26}\right)}{2\left(2x+4+\sqrt{26}\right)}\right| + \left(\frac{1}{4}\ln 8 + C\right) = \left|\begin{array}{l}\text{Так как } \frac{1}{4}\ln 8 - \text{постоянная величина,то можно}\\ \text{внести её в произвольную постоянную } C\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+8x-5\right| - \frac{1}{\sqrt{26}}\ln\left|\frac{2x+4-\sqrt{26}}{2x+4+\sqrt{26}}\right| + C.$$

Пример 3.

$$\int\frac{5x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \left|\begin{array}{l}3-2x-x^2=-x^2-2x+3=-\left(x^2+2x\right)+3=-\left(x^2+2x+1^2\right)+1^2+3=\\ =-\left(x+1\right)^2+4. \text{ Обозначим } t=x+1, \text{отсюда } x=t-1, dx=dt,\\ \text{тогда } 3-2x-x^2=-t^2+4=4-t^2\end{array}\right| =$$

$$= \int\frac{5(t-1)-2}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int\frac{5t-7}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int\left(\frac{5t}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{7}{\sqrt{4-t^2}}\right)dt = 5\int\frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - 7\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= -\frac{5}{2}\int\frac{d\left(4-t^2\right)}{\sqrt{4-t^2}} - 7\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = -\frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{4-t^2} - 7\arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= -5\sqrt{3-2x-x^2} - 7\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$