Вариант 1

Теоретические задачи

1. **(2 балла)** На комплексной плоскости рассматривается область G, заданная неравенством

$$|x-2y-6|+|x+2y|<6$$

(здесь $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$). Область D – образ области G при отображении $w(z)=z^2$. Изобразите область D и найдите её площадь.

Ответ: криволинейный треугольник ABC с вершинами $A(-9;0)$, $B(36;0)$, $C(27;-36)$, границами которого являются отрезок AB и дуги парабол AC и BC с уравнениями $u=\frac{v^2}{36}-9$ и $u=36-\frac{v^2}{144}$ соответственно. Его площадь равна 1 080.

Решение. Рассматривая различные возможные случаи раскрытия модуля, находим, что область G представляет собой прямоугольник $0<x<6, -3<y<0$. Пусть $w=u+iv$. Приравнивая в соотношении $w=z^2$ $\left(u+iv=(x+iy)^2\right)$ действительную и мнимую части, получаем $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. Отсюда находим образы каждой границы прямоугольника.

1) $x=0 \Rightarrow u=-y^2, v=0$. Учитывая, что $y\in(-3;0)$, получаем $u\in(-9;0)$, а $v=0$ – выходит отрезок, соединяющий точки $A(-9;0)$ и $O(0;0)$.

2) $x=6 \Rightarrow u=36-y^2, v=12y$. Значит, $y=\frac{v}{12}$, $u=36-\frac{v^2}{144}$. Так как $y\in(-3;0)$, то $v\in(-36;0)$. Получаем дугу параболы $u=36-\frac{v^2}{144}$ с концами в точках $B(36;0)$ и $C(27;-36)$.

Оставшиеся две границы рассматриваются аналогично. Образ отрезка $y=-3, 0<x<6$ – дуга параболы $u=\frac{v^2}{36}-9$ с концами в точках A и C; образ отрезка $y=0, 0<x<6$ – отрезок BO.

В итоге получаем криволинейный треугольник ABC с вершинами $A(-9;0)$, $B(36;0)$, $C(27;-36)$, границами которого являются отрезок AB и дуги парабол AC и BC с уравнениями $u=\frac{v^2}{36}$ и $u=36-\frac{v^2}{144}$ соответственно.

Площадь этой области равна

$$\int\limits_{-36}^{0}\left(\left(36-\frac{v^2}{144}\right)-\left(\frac{v^2}{36}-9\right)\right)dv=\int\limits_{-36}^{0}\left(45-\frac{5v^2}{144}\right)dv=\left(45v-\frac{5v^3}{432}\right)\Bigg|_{-36}^{0}=1\,080.$$

2. **(2 балла)** Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\left(x^4\right)\cdot\int\limits_{3x}^{5x}\operatorname{arctg}\left(t^3\right)dt\right)$.

Ответ: 136.

Решение. Данный предел равен

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos\left(x^4\right)}{\sin\left(x^4\right)}\cdot\int\limits_{3x}^{5x}\operatorname{arctg}\left(t^3\right)dt\right)=\lim_{x\to 0}\left(\cos\left(x^4\right)\cdot\frac{\int\limits_{3x}^{5x}\operatorname{arctg}\left(t^3\right)dt}{\sin\left(x^4\right)}\right).$$

Первый множитель стремится к 1 при $x\to 0$, а второй представляет собой неопределённость вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя получаем, что предел равен[1]

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\operatorname{arctg}\left(125x^3\right)-3\operatorname{arctg}\left(27x^3\right)}{4x^3\cos\left(x^4\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 125x^3-3\cdot 27x^3+o\left(x^5\right)}{4x^3}=136.$$

[1] Строго говоря, мы сначала убеждаемся, что предел отношения производных существует, и только потом можем сказать, что искомый предел равен полученному выражению.

3. **(2 балла)** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u(x;y) = 16x^2 - 24xy + 24x + 9y^2 - 18y$ на множестве $\{(x;y)\,|\,x^2 - 6x + y^2 - 10y + 9 \leqslant 0\}$.

Ответ: $\min u = -9$, $\max u = 616$.

Решение. Заметим, что в задаче нужно найти наибольшее и наименьшее значения функции $u(x;y) = (4x-3y+3)^2 - 9$ на множетсве $G = \{(x;y)\,|\,(x-3)^2 + (y-5)^2 \leqslant 5^2\}$, где G – это круг с центром в точке $(3;5)$ радиуса 5. Если ввести смещённые полярные координаты ($x = 3 + r\cos\varphi,\ y = 5 + r\sin\varphi$), множество G представляет собой множество $G*$, определяемое условиями

$$G^* = \{(r,\varphi)\,|\,0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 5\}.$$

Записывая $u(x;y)$ в новых координатах, получаем

$$u = (4(3 + r\cos\varphi) - 3(5 + r\sin\varphi) + 3)^2 - 9 = (4r\cos\varphi - 3r\sin\varphi)^2 - 9 = \left(5r\cos\left(\varphi + \arccos\frac{4}{5}\right)\right)^2 - 9.$$

Следовательно,

$$\min_G u(x;y) = \min_{G^*}\left(\left(5r\cos\left(\varphi + \arccos\frac{4}{5}\right)\right)^2 - 9\right) = 0^2 - 9 = -9,$$
$$\max_G u(x;y) = \max_{G^*}\left(\left(5r\cos\left(\varphi + \arccos\frac{4}{5}\right)\right)^2 - 9\right) = 25^2 - 9 = 616.$$

4. **(2 балла)** В некоторой республике 65 фермерских хозяйств, производящих сыр. Известно, что любые 30 из них производят не менее 21% сыра в республике. Какой наибольший процент сыра может производиться одним хозяйством?

Ответ: 55,2.

Решение. Обозначим процент сыра, производимого в хозяйстве номер k через x_k. Выберем одно хозяйство (без ограничения общности первое) и рассмотрим 64 оставшихся. Всего существует C_{64}^{30} наборов по 30 хозяйств из этих 64. Для каждого набора процент производимого сыра не меньше 21. Получаем C_{64}^{30} неравенств вида

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_{31} \geqslant 21,$$
$$\ldots$$
$$x_{36} + x_{37} + \ldots + x_{65} \geqslant 21.$$

Каждое слагаемое x_i в левой части встречается ровно $C_{64-1}^{30-1} = C_{63}^{29}$ раз. Значит, если просуммировать все неравенства, мы получаем $C_{63}^{29}(x_2 + x_3 + \ldots + x_{65}) \geqslant 21 \cdot C_{64}^{30}$, откуда $x_2 + x_3 + \ldots + x_{65} \geqslant \frac{C_{64}^{30}}{C_{63}^{29}} \cdot 21 = \frac{64}{30} \cdot 21 = 44{,}8$. Значит, $x_1 = 100 - (x_2 + \ldots + x_{65}) \leqslant 100 - 44{,}8 = 55{,}2$, т.е. первое хозяйство производит не более 55,2 процентов сыра.

Ситуация, в которой одно из хозяйств производит ровно 55,2 процента сыра, возможна. Для этого нужно, чтобы каждое из оставшихся хозяйств производило $\frac{44{,}8}{64} = 0{,}7$ процента сыра. Тогда любые 30 хозяйств будут производить не менее $0{,}7 \cdot 30 = 21$ процента сыра.

5. **(3 балла)** Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|}{1 + 2^{\cos x}}\,dx$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{8}$.

Решение. Разбиваем исходный интеграл I на два: $I = \int\limits_0^{\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}$, после чего во втором интеграле делаем замену $x = \pi - t$. Тогда

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|}{1 + 2^{\cos x}}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\left|t - \frac{\pi}{2}\right|}{1 + 2^{-\cos t}}\,dt.$$

Записывая под одним интегралом, приводим полученные дроби к общему знаменателю:

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{(1+2^{\cos x})\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}{1+2^{\cos x}}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. **(2 балла)** Пусть $u = \left(\sqrt{2}; \sqrt{4}; \ldots; \sqrt{100}\right)^T \in \mathbb{R}^{50}$ (векторы записываются столбцами) и линейное преобразование $\varphi\colon \mathbb{R}^{50} \to \mathbb{R}^{50}$ задано формулой $\varphi(v) = (uu^T)v$. Найдите характеристический многочлен $p(\lambda)$ преобразования φ. Является ли φ диагонализируемым?

   : характеристический многочлен равен $\lambda^{49}(\lambda - 2\,550)$; преобразование диагонализируемо.

   Решение. Ранг матрицы $A = uu^T$ равен единице, поэтому размерность ядра преобразования A равна $\dim \mathbb{R}^{50} - rg\, A = 49$. Значит, $\lambda = 0$ является корнем $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ кратности не меньше 49. Так как $\varphi(u) = (uu^T)u = u(u^T u)$, то u – собственный вектор φ, отвечающий собственному значению $\lambda_0 = u^T u = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100 = 2550$. Следовательно, $p(\lambda) = \lambda^{49}(\lambda - 2550)$.

   Преобразование φ диагонализируемо, поскольку размерность пространства совпадает с суммой размерностей собственных подпространств.

7. **(3 балла)** Найдите все значения вещественного параметра a, для каждого из которых точка $O(0;0)$ является устойчивым, но не асимптотически устойчивым положением равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(a^2 - a\right)x - y - ax\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dot{y} = x - ay\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

   Ответ: $a = 0$.

   Решение. Рассмотрим в окрестности точки $O(0;0)$ линеаризованную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(a^2 - a\right)x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

   Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид $\lambda^2 - \left(a^2 - a\right)\lambda + 1 = 0$. Т.к. $\lambda_1\lambda_2 = 1 \neq 0$, то в случае, когда $a^2 - a = \operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re}\lambda_2$ также не равно нулю, для обеих систем точка $O(0;0)$ будет или асимптотически устойчивым, или неустойчивым положением равновесия. Таким образом, остаётся рассмотреть два значения параметра: $a = 0$ и $a = 1$.

   (a) $a = 0$. Исходная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

   Точка $O(0;0)$ здесь является центром, т.е. устойчивым, но не асимптотически устойчивым положением равновесия.

   (b) $a = 1$. Исходная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dot{y} = x - y\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

   Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получаем

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^2, \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

   Для этой системы точка $O(0;0)$ является асимптотически устойчивым положением равновесия.

Задачи от индустриальных партнёров

8. **(3 балла)** Малыш и фрекен Бок заключили пари. Если Малыш с утра заправляет за собой кровать, то он получает от фрекен Бок 1 крону, а если нет, то он отдаёт одну крону фрекен Бок. Вероятность, что он заправит кровать, равна $\frac{4}{7}$ (каждый день эта вероятность одна и та же; при этом будет ли заправлена кровать в какой-либо день, не зависит от того, была ли она заправлена в другие дни). Если Малышу удастся накопить 3 кроны, то он вознаградит себя вкусным мороженым, а если однажды он не заправит кровать, и у него не будет денег, фрекен Бок пожалуется родителям. При наступлении одного из этих событий пари более не возобновляется. Какова вероятность того, что Малыш полакомится вкусным мороженым, если на момент заключения пари у него есть 1 крона?

   Ответ: $\frac{16}{25}$.

   Решение. Обозначим через p_i вероятность полакомиться мороженым при условии, что у Малыша i крон. Получаем соотношения

$$\begin{cases} p_0 = \frac{3}{7} \cdot 0 + \frac{4}{7} \cdot p_1, \\ p_1 = \frac{3}{7} \cdot p_0 + \frac{4}{7} \cdot p_2, \\ p_2 = \frac{3}{7} \cdot p_1 + \frac{4}{7} \cdot 1. \end{cases}$$

   Поясним, как составлена система. Например, второе уравнение означает, что если на данный момент у Малыша 1 крона (и вероятность выигрыша p_1), то с вероятностью $\frac{3}{7}$ он не заправит кровать, и у него останется 0 крон (вероятность выигрыша станет равна p_0), а с вероятностью $\frac{4}{7}$ он заправит кровать (вероятность выигрыша станет равна p_2). Решая эту систему линейных уравнений, находим, что $p_0 = \frac{64}{175}$, $p_1 = \frac{16}{25}$, $p_2 = \frac{148}{175}$. Искомая вероятность – это $p_1 = \frac{16}{25}$.

9. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите площадь множества $\varphi(G)$, где $G = \left\{(x; y; z) \,\middle|\, x^2 + 5y^2 \leqslant 5; z = 0\right\}$.

   Ответ: $54\sqrt{5}\pi$.

   Решение. Данная матрица является симметрической, поэтому соответствующее ей преобразование имеет ортонормированный базис из собственных векторов. В этом базисе матрица имеет вид $\operatorname{diag}(0; 9; 9)$, где собственный вектор $\mathbf{h}$, соответсвующий собственному значению $\lambda = 0$ равен $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$. Отсюда следует, что φ – это композиция проецирования на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{h}$, и гомотетии с коэффициентом $k = 9$. Поэтому искомая площадь равна $k^2 S \cos\angle(\mathbf{h}; Oz)$, где S – это площадь множества G, а именно площадь эллипса с полуосями $\sqrt{5}$ и 1. Косинус угла между векторами $\mathbf{h}$ и $(0; 0; 1)$ несложно найти через скалярное произведение векторов: $\cos\angle(\mathbf{h}; Oz) = \frac{0+0+2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3}$. Итого, искомая площадь равна

$$9^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{5}\pi = 54\sqrt{5}\pi.$$

10. **(3 балла)** Имеется 400 карточек, на k из них написано число 1, на каждой из остальных – либо число 2, либо число 4. Известно, что среди этих карточек есть хотя бы одна карточка с числом 2, и хотя бы одна с числом 4. При каком наименьшем k из этих карточек гарантированно можно составить невырожденную матрицу размера 20×20, независимо от того, сколько имеется карточек с числом 2 и сколько карточек с числом 4?

   Ответ: 18.

   Решение. Сначала докажем, что если k не более 17, то найдётся набор карточек, для которого составить невырожденную матрицу нельзя. Рассмотрим набор, в котором ровно одна карточка с числом 2. Тогда есть не более 18 карточек с 2 и с 1, и в матрице найдутся два одинаковых столбца, составленные только из чисел 4, и матрица вырождена. Поэтому $k \geqslant 18$.

   Пусть $k = 18$. Докажем, что можно расположить карточки так, чтобы получить невырожденную матрицу. Рассмотрим два случая.

   1) Есть только одна карточка с числом 2. Тогда расположим k карточек с числом 1 и карточку с числом 2 на диагонали матрицы, а остальные карточки расположим произвольно. Полученная матрица невырождена. Покажем это, используя формулу полного разложения для детерминанта матрицы.

Произведение диагональных элементов равно $2 \cdot 4$. Это число делится на 8, но не делится на 16. В любом другом слагаемом в формуле полного разложения число 4 содержится по крайней мере дважды, и поэтому все они делятся на 16. Таким образом, детерминант матрицы – это знакопеременная сумма чисел, одно из которых делится на 8, но не делится на 16, а остальные делятся на 16. Поэтому и детерминант делится на 8, но не делится на 16. Поэтому он не может равняться 0.

2) Карточек с числом 2 хотя бы две. Тогда расположим карточки следующим образом. На диагонали расположим k карточек с числом 1 и две карточки с числом 2, причём единицы поставим в первые 18 строк. В 19 строку в 20 столбец поставим карточку с числом 4, а остальные карточки расположим произвольно, и полученная матрица невырождена. Покажем это, используя формулу полного разложения. Произведение диагональных элементов равно 4. Это число делится на 4, но не делится на 8. В сумме ещё только одно слагаемое в качестве сомножителей имеет все k карточек с числом 1. В этом слагаемом оставшиеся два сомножителя – это карточка из 19 строки и 20 столбца, и карточка из 20 строки и 19 столбца. На одной из них написано число 4, а на другой – 2 или 4. Поэтому данное слагаемое делится на 8. Любое другое слагаемое в формуле полного разложения содержит менее k карточек с числом 1, то есть хотя бы 3 карточки с числами 2 или 4. Поэтому каждое такое слагаемое делится на 8. Таким образом, детерминант матрицы – это знакопеременная сумма чисел, одно из которых делится на 4, но не делится на 8, а остальные делятся на 8. Поэтому и детерминант делится на 4, но не делится на 8. Поэтому он не может равняться 0.

Вариант 2

Теоретические задачи

1. **(2 балла)** На комплексной плоскости рассматривается область G, заданная неравенством

$$|2x+y-4|+|2x-y|<4$$

(здесь $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$). Область D – образ области G при отображении $w(z) = z^2$. Изобразите область D и найдите её площадь.

Ответ: криволинейный треугольник ABC с вершинами $A(-16;0)$, $B(4;0)$, $C(-12;16)$, границами которого являются отрезок AB и дуги парабол AC и BC с уравнениями $u = \frac{v^2}{64} - 16$ и $u = 4 - \frac{v^2}{16}$ соответственно. Его площадь равна $\frac{640}{3}$.

2. **(2 балла)** Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\left(x^3\right)\cdot\int\limits_{3x}^{4x}\arcsin\left(t^2\right)\,dt\right)$.

Ответ: $\frac{37}{3}$.

3. **(2 балла)** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u(x;y) = 9x^2+24xy-24x+16y^2-32y$ на множестве $\left\{(x;y)\,\middle|\,x^2+y^2+8x-8y+7\leqslant 0\right\}$.

Ответ: $\min u = -16$, $\max u = 609$.

4. **(2 балла)** В некоторой республике 80 фермерских хозяйств, производящих сыр. Известно, что любые 35 из них производят не менее 28% сыра в республике. Какой наибольший процент сыра может производиться одним хозяйством?

Ответ: 36,8.

5. **(3 балла)** Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+3^{\cos\frac{x}{2}}}\,dx$.

Ответ: $\frac{\pi^3}{3}$.

6. **(2 балла)** Пусть $u = \left(1;\sqrt{2};\ldots;\sqrt{100}\right)^T \in \mathbb{R}^{100}$ (векторы записываются столбцами) и линейное преобразование $\varphi\colon \mathbb{R}^{100}\to\mathbb{R}^{100}$ задано формулой $\varphi(v) = \left(uu^T\right)v$. Найдите характеристический многочлен $p(\lambda)$ преобразования φ. Является ли φ диагонализируемым?

Ответ: $p(\lambda) = \lambda^{99}(\lambda-5050)$; да.

7. **(3 балла)** Найдите все значения вещественного параметра a, для каждого из которых точка $O(0;0)$ является устойчивым, но не асимптотически устойчивым положением равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (a+2)\,x\left(x^2+y^2\right), \\ \dot{y} = -x + \left(a^4+8a\right)y + (a+2)\,y\left(x^2+y^2\right). \end{cases}$$

Ответ: $a = -2$.

Задачи от индустриальных партнёров

8. **(3 балла)** Малыш и фрекен Бок заключили пари. Если Малыш с утра заправляет за собой кровать, то он получает от фрекен Бок 1 крону, а если нет, то он отдаёт одну крону фрекен Бок. Вероятность, что он заправит кровать, равна $\frac{3}{7}$ (каждый день эта вероятность одна и та же; при этом будет ли заправлена кровать в какой-либо день, не зависит от того, была ли она заправлена в другие дни). Если Малышу удастся накопить 3 кроны, то он вознаградит себя вкусным мороженым, а если однажды он не заправит кровать, и у него не будет денег, фрекен Бок пожалуется родителям. При наступлении одного из этих событий пари более не возобновляется. Какова вероятность того, что Малыш полакомится вкусным мороженым, если на момент заключения пари у него есть 1 крона?

Ответ: $\frac{9}{25}$.

9. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите площадь $\varphi(G)$, где $G = \left\{(x; y; z) \,\middle|\, 4x^2 + 5y^2 \leqslant 20; z = 0\right\}$.

   Ответ: $108\sqrt{5}\pi$.

10. **(3 балла)** Имеется 625 карточек, на k из них написано число 1, на каждой из остальных – либо число 2, либо число 4. Известно, что среди этих карточек есть хотя бы одна карточка с числом 2, и хотя бы одна с числом 4. При каком наименьшем k из этих карточек гарантированно можно составить невырожденную матрицу размера 25×25, независимо от того, сколько имеется карточек с числом 2 и сколько карточек с числом 4?

    Ответ: 23.

Вариант 3

Теоретические задачи

1. **(2 балла)** На комплексной плоскости рассматривается область G, заданная неравенством
$$|3x - y + 12| + |3x + y| < 12$$
(здесь $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$). Область D – образ области G при отображении $w(z) = z^2$. Изобразите область D и найдите её площадь.

Ответ: криволинейный треугольник ABC с вершинами $A(-144; 0)$, $B(16; 0)$, $C(-128; -96)$, границами которого являются отрезок AB и дуги парабол AC и BC с уравнениями $u = \frac{v^2}{576} - 144$ и $u = 16 - \frac{v^2}{64}$ соответственно. Его площадь равна 10 240.

2. **(2 балла)** Найдите $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{ctg}\left(x^4\right) \cdot \int\limits_{2x}^{4x} \operatorname{tg}\left(t^3\right)\, dt \right)$.

Ответ: 60.

3. **(2 балла)** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u(x; y) = 16x^2 + 24xy + 48x + 9y^2 + 36y$ на множестве $\left\{(x; y) \,\middle|\, x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 \leqslant 0\right\}$.

Ответ: $\min u = -36$, $\max u = 589$.

4. **(2 балла)** В некоторой республике 55 фермерских хозяйств, производящих сыр. Известно, что любые 36 из них производят не менее 55% сыра в республике. Какой наибольший процент сыра может производиться одним хозяйством?

Ответ: 17,5.

5. **(3 балла)** Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\left|x - \frac{\pi}{4}\right|}{1 + 4^{\cos 2x}}\, dx$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{32}$.

6. **(2 балла)** Пусть $u = \left(1, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{50}\right)^T \in \mathbb{R}^{50}$ (векторы записываются столбцами) и линейное преобразование $\varphi\colon \mathbb{R}^{50} \to \mathbb{R}^{50}$ задано формулой $\varphi(v) = \left(uu^T\right) v$. Найдите характеристический многочлен $p(\lambda)$ преобразования φ. Является ли φ диагонализируемым?

Ответ: $p(\lambda) = \lambda^{49}(\lambda - 1275)$; да.

7. **(3 балла)** Найдите все значения вещественного параметра a, для каждого из которых точка $O(0; 0)$ является устойчивым, но не асимптотически устойчивым положением равновесия системы:
$$\begin{cases} \dot{x} = \left(a^2 + a\right) x + y - (a + 1)\, x\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = -x - (a + 1)\, y\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Ответ: $a = -1$.

Задачи от индустриальных партнёров

8. **(3 балла)** Малыш и фрекен Бок заключили пари. Если Малыш с утра заправляет за собой кровать, то он получает от фрекен Бок 1 крону, а если нет, то он отдаёт одну крону фрекен Бок. Вероятность, что он заправит кровать, равна $\frac{3}{4}$ (каждый день эта вероятность одна и та же; при этом будет ли заправлена кровать в какой-либо день, не зависит от того, была ли она заправлена в другие дни). Если Малышу удастся накопить 3 кроны, то он вознаградит себя вкусным мороженым, а если однажды он не заправит кровать, и у него не будет денег, фрекен Бок пожалуется родителям. При наступлении одного из этих событий пари более не возобновляется. Какова вероятность того, что Малыш полакомится вкусным мороженым, если на момент заключения пари у него есть 2 кроны?

Ответ: $\frac{39}{40}$.

9. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & -2 \\ 1 & -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Найдите площадь множества $\varphi(G)$, где $G = \left\{(x;y;z) \,\middle|\, 20x^2 + y^2 \leqslant 20; z = 0\right\}$.

   Ответ: $27\sqrt{5}\pi$.

10. **(3 балла)** Имеется 900 карточек, на k из них написано число 1, на каждой из остальных – либо число 3, либо число 9. Известно, что среди этих карточек есть хотя бы одна карточка с числом 3, и хотя бы одна с числом 9. При каком наименьшем k из этих карточек гарантированно можно составить невырожденную матрицу размера 30×30, независимо от того, сколько имеется карточек с числом 3 и сколько карточек с числом 9?

    Ответ: 28.

Вариант 4

Теоретические задачи

1. **(2 балла)** На комплексной плоскости рассматривается область G, заданная неравенством
$$|x+4y|+|x-4y-8|<8$$
(здесь $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$). Область D – образ области G при отображении $w(z)=z^2$. Изобразите область D и найдите её площадь.

   Ответ: криволинейный треугольник ABC с вершинами $A(-4;0)$, $B(64;0)$, $C(60;-32)$, границами которого являются отрезок AB и дуги парабол AC и BC с уравнениями $u=\frac{v^2}{16}-4$ и $u=64-\frac{v^2}{256}$ соответственно. Его площадь равна $\frac{4\,352}{3}$.

2. **(2 балла)** Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}(x^3)\cdot\int\limits_{2x}^{3x}\sin(t^2)\,dt\right)$.

   Ответ: $\frac{19}{3}$.

3. **(2 балла)** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u(x;y)=9x^2-24xy-48x+16y^2+64y$ на множестве $\left\{(x;y)\,\middle|\,x^2+y^2-8x-2y-8\leqslant 0\right\}$.

   Ответ: $\min u=-64$, $\max u=561$.

4. **(2 балла)** В некоторой республике 36 фермерских хозяйств, производящих сыр. Известно, что любые 25 из них производят не менее 28% сыра в республике. Какой наибольший процент сыра может производиться одним хозяйством?

   Ответ: 60,8.

5. **(3 балла)** Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{(x-\pi)^4}{1+5^{\cos\frac{x}{2}}}\,dx$.

   Ответ: $\frac{\pi^5}{5}$.

6. **(2 балла)** Пусть $u=\left(\sqrt{50};\sqrt{48};\ldots;\sqrt{2}\right)^T\in\mathbb{R}^{25}$ (векторы записываются столбцами) и линейное преобразование $\varphi\colon\mathbb{R}^{25}\to\mathbb{R}^{25}$ задано формулой $\varphi(v)=\left(uu^T\right)v$. Найдите характеристический многочлен $p(\lambda)$ преобразования φ. Является ли φ диагонализируемым?

   Ответ: $p(\lambda)=-\lambda^{24}(\lambda-650)$; да.

7. **(3 балла)** Найдите все значения вещественного параметра a, для каждого из которых точка $O(0;0)$ является устойчивым, но не асимптотически устойчивым положением равновесия системы:
$$\begin{cases}\dot{x}=-y-(a-2)\,x\left(x^2+y^2\right),\\ \dot{y}=x+\left(a^4-8a\right)y-(a-2)\,y\left(x^2+y^2\right).\end{cases}$$

   Ответ: $a=2$.

Задачи от индустриальных партнёров

8. **(3 балла)** Малыш и фрекен Бок заключили пари. Если Малыш с утра заправляет за собой кровать, то он получает от фрекен Бок 1 крону, а если нет, то он отдаёт одну крону фрекен Бок. Вероятность, что он заправит кровать, равна $\frac{1}{3}$ (каждый день эта вероятность одна и та же; при этом будет ли заправлена кровать в какой-либо день, не зависит от того, была ли она заправлена в другие дни). Если Малышу удастся накопить 3 кроны, то он вознаградит себя вкусным мороженым, а если однажды он не заправит кровать, и у него не будет денег, фрекен Бок пожалуется родителям. При наступлении одного из этих событий пари более не возобновляется. Какова вероятность того, что Малыш полакомится вкусным мороженым, если на момент заключения пари у него денег нет?

   Ответ: $\frac{1}{15}$.

9. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся матрицей $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Найдите площадь множества $\varphi(G)$, где $G = \left\{(x;y;z)\,\middle|\,5x^2 + 4y^2 \leqslant 4; z = 0\right\}$.

   Ответ: $\frac{27\pi}{\sqrt{5}}$.

10. **(3 балла)** Имеется 225 карточек, на k из них написано число 1, на каждой из остальных – либо число 3, либо число 9. Известно, что среди этих карточек есть хотя бы одна карточка с числом 3, и хотя бы одна с числом 9. При каком наименьшем k из этих карточек гарантированно можно составить невырожденную матрицу размера 15×15, независимо от того, сколько имеется карточек с числом 3 и сколько карточек с числом 9?

    Ответ: 13.