# Карты Карно, Код Грея, минимизация СДНФ и СКНФ с помощью карт Карно

**Карты Карно** – это инструмент и процедура, используемые для минимизации булевых функций. Это графический метод, который можно использовать для разработки вручную простых логических функций с небольшим количеством переменных. Карты Карно всегда позволяют получать минимальное выражение и обычно требуют меньше шагов, чем упрощение логических функций, представленных в алгебраической форме.

Карта Карно логической функции в действительности это таблица истинности этой функции, оформленная в виде сетки. Строки и столбцы карты соответствуют возможным значениям входных переменных, а каждая ячейка – выходная переменная функции для соответствующих входов.

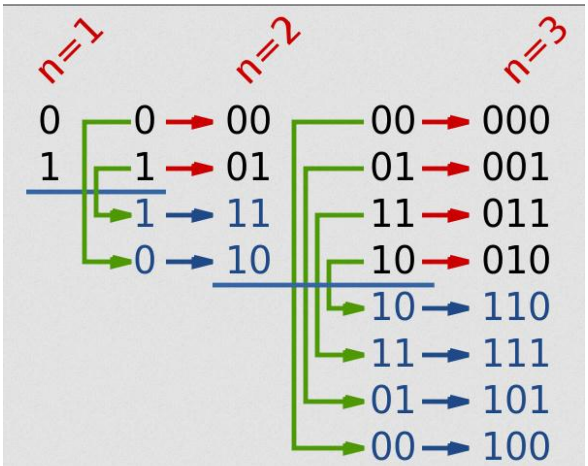
Упрощенные логические выражения всегда представляются в одной из двух стандартных форм:
- ДНФ (дизъюнктивной нормальной форме)
- КНФ (конъюнктивной нормальной форме)

Ячейки образуют квадрат или прямоугольник и расположены так, что соседние ячейки отличаются значением только одной переменной, то есть упорядочены по коду Грея. Для простоты значения входных переменных используются в качестве меток столбцов и строк. Каждая ячейка соответствует строке в таблице истинности

## Код Грея

**Код Грея** (англ. *Gray code*) — такое **упорядочение** $k$**-ичных** (обычно двоичных) **векторов, что соседние вектора отличаются только в одном разряде**.

Код назван в честь Фрэнка Грея, который в 1947-ом году получил патент на "отражённый двоичный код".




*Получение зеркального двоичного кода Грея.*

[Источник]()

Существует несколько видов кода Грея, самый простой из них — так называемый зеркальный двоичный код Грея. Строится он так:

**Для получения кода длины $n$**

производится $n$ шагов. На первом шаге код имеет длину $1$ и состоит из двух векторов $0$ и $1$. На каждом следующем шаге в конец списка заносятся все уже имеющиеся вектора в обратном порядке, и затем к первой половине получившихся векторов дописывается $0$, а ко второй $1$. С каждым шагом длина векторов увеличивается на $1$, а их количество — вдвое. Таким образом, количество векторов длины $n$ равно $2^n$.

## Минимизация булевых функций методом карт Карно

**Карта Карно** — графический способ минимизации переключательных (булевых) функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями и устранение потенциальных гонок. Представляет собой операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Карты Карно рассматриваются как перестроенная соответствующим образом таблица истинности функции. Карты Карно можно рассматривать как определенную плоскую развертку n-мерного булева куба.

Карты Карно были изобретены в 1952 Эдвардом В. Вейчем и усовершенствованы в 1953 Морисом Карно, физиком из «Bell Labs», и были призваны помочь упростить цифровые электронные схемы.

В карту Карно булевы переменные передаются из таблицы истинности и упорядочиваются с помощью кода Грея, в котором каждое следующее число отличается от предыдущего только одним разрядом.

Основным методом минимизации логических функций, представленных в виде СДНФ или СКНФ является операция попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Операция попарного склеивания осуществляется между двумя термами (членами), содержащими одинаковые переменные, вхождения которых (прямые и инверсные) совпадают для всех переменных, кроме одной. В этом случае все переменные, кроме одной, можно вынести за скобки, а оставшиеся в скобках прямое и инверсное вхождение одной переменной подвергнуть склейке. Например:

$$\overline{X}_1X_2X_3X_4 \vee \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4 = \overline{X}_1X_2X_4(X_3 \vee \overline{X}_3) = \overline{X}_1X_2X_4$$

Возможность поглощения следует из очевидных равенств

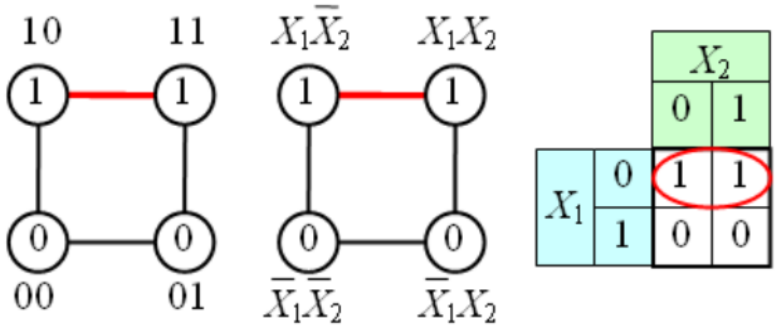
$$A \vee \overline{A} = 1; A\overline{A} = 0.$$

Таким образом, главной задачей при минимизации СДНФ и СКНФ является поиск термов, пригодных к склейке с последующим поглощением, что для больших форм может оказаться достаточно сложной задачей. Карты Карно предоставляют наглядный способ отыскания таких термов.

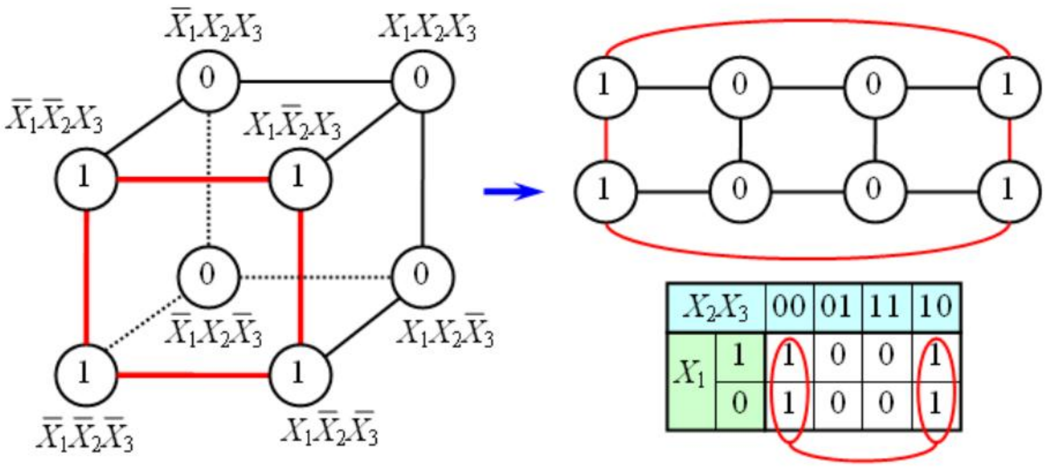
Как известно, булевы функции N переменных, представленные в виде СДНФ или СКНФ могут иметь в своём составе 2N различных термов. Все эти члены составляют некоторую структуру, топологически эквивалентную N–мерному кубу, причём любые два терма, соединённые ребром, пригодны для склейки и поглощения.

На рисунке изображена простая таблица истинности для функции из двух переменных, соответствующий этой таблице 2-мерный куб (квадрат), а также 2-мерный куб с обозначением членов СДНФ и эквивалентная таблица для группировки термов:

| $X_1$ | $X_2$ | $f(X_1, X_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |




В случае функции трёх переменных приходится иметь дело с трёхмерным кубом. Это сложнее и менее наглядно, но технически возможно. На рисунке в качестве примера показана таблица истинности для булевой функции трёх переменных и соответствующий ей куб.

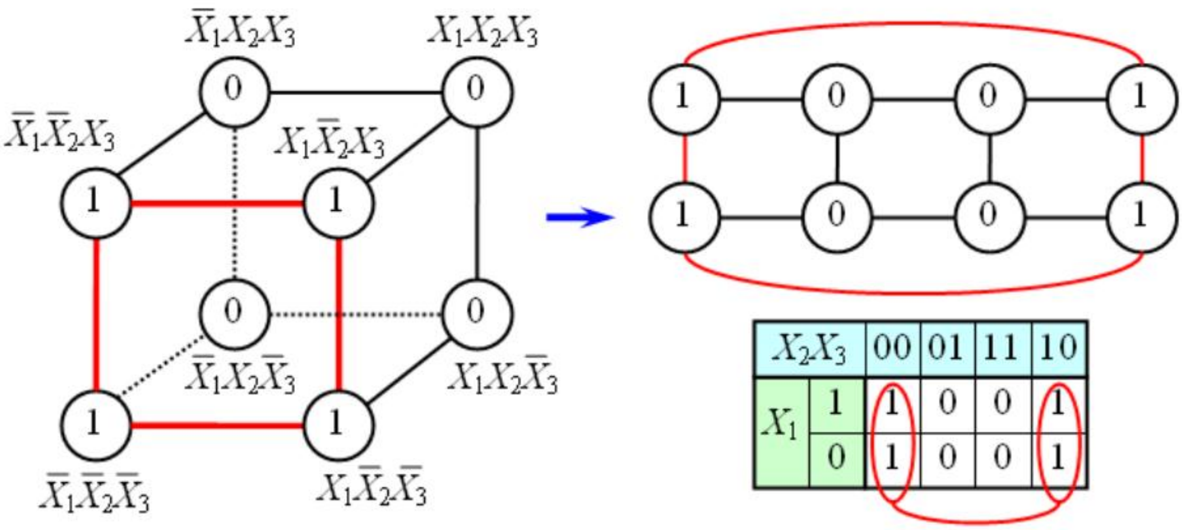



Как видно из рисунка, для трёхмерного случая возможны более сложные конфигурации термов. Например, четыре терма, принадлежащие одной грани куба, объединяются в один терм с поглощением двух переменных:

$$\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3 \vee X_1\overline{X}_2\overline{X}_3 \vee \overline{X}_1\overline{X}_2X_3 \vee X_1\overline{X}_2X_3 =$$

В общем случае можно сказать, что 2K термов, принадлежащие одной K–мерной грани гиперкуба, склеиваются в один терм, при этом поглощаются K переменных.

Для упрощения работы с булевыми функциями большого числа переменных был предложен следующий удобный приём. Куб, представляющий собой структуру термов, разворачивается на плоскость как показано на рисунке. Таким образом появляется возможность представлять булевы функции с числом переменных больше двух в виде плоской таблицы. При этом следует помнить, что порядок кодов термов в таблице (00 01 11 10) не соответствует порядку следования двоичных чисел, а клетки, находящиеся в крайних столбцах таблицы, соседствуют между собой.




| $X_2X_3$ | | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Аналогичным образом можно работать с функциями четырёх, пяти и более переменных. Примеры таблиц для N=4 и N=5 приведены на рисунке. Для этих таблиц следует помнить, что соседними являются клетки, находящиеся в соответственных клетках крайних столбцов и соответственных клетках верхней и нижней строки. Для таблиц 5 и более переменных нужно учитывать также, что квадраты 4x4 виртуально находятся друг над другом в третьем измерении, поэтому соответственные клетки двух соседних квадратов 4x4 являются соседними, и соответствующие им термы можно склеивать.

| $X_3X_4$ | | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1X_2$ | 00 | | | | 1 |
| | 01 | | 1 | 1 | |
| | 10 | | | | |
| | 11 | | | | 1 |

| $X_5$ | | 0 | | | | 1 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_3X_4$ | | 00 | 01 | 11 | 10 | 00 | 01 | 11 | 10 |
| $X_1X_2$ | 00 | | | | | | | | |
| | 01 | | | | | | | | |
| | 10 | | | 1 | | | | 1 | |
| | 11 | | | | | | | | |

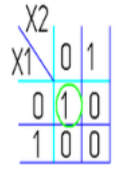
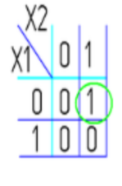
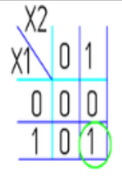
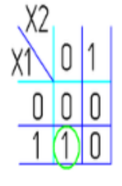
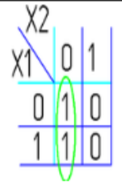
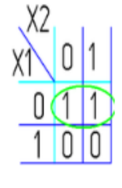
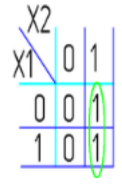
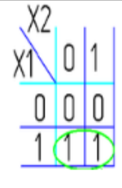
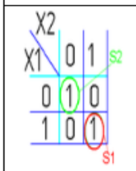
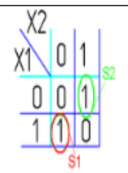
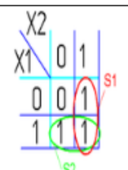
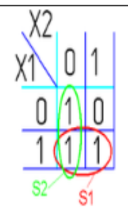
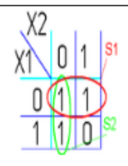
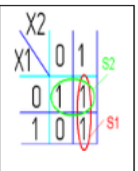
Карта Карно может быть составлена для любого количества переменных, однако удобно работать при количестве переменных не более пяти. По сути Карта Карно — это таблица истинности составленная в 2-х мерном виде. Благодаря использованию кода Грея в ней верхняя строка является соседней с нижней, а правый столбец соседний с левым, т.о. вся Карта Карно сворачивается в фигуру тор (бублик). На пересечении строки и столбца проставляется соответствующее значение из таблицы истинности. После того как Карта заполнена, можно приступать к минимизации.

Если необходимо получить минимальную ДНФ, то в Карте рассматриваем только те клетки которые содержат единицы, если нужна КНФ, то рассматриваем те клетки которые содержат нули.

## Сама минимизация производится по следующим правилам (на примере ДНФ):

1. Объединяем смежные клетки содержащие единицы в область, так чтобы одна область содержала $2^n$ ($n$ целое число = $0\ldots\infty$) клеток (помним про то что крайние строки и столбцы являются соседними между собой), в области не должно находиться клеток содержащих нули;
2. Область должна располагаться симметрично оси(ей) (оси располагаются через каждые четыре клетки);
3. Не смежные области расположенные симметрично оси(ей) могут объединяться в одну;
4. Область должна быть как можно больше, а количествово областей как можно меньше;
5. Области могут пересекаться;
6. Возможно несколько вариантов накрытия.

Далее берём первую область и смотрим какие переменные не меняются в пределах этой области, выписываем конъюнкцию этих переменных, если неменяющаяся переменная нулевая, проставляем над ней инверсию. Берём следующую область, выполняем то же самое что и для первой, и т. д. для всех областей. Конъюнкции областей объединяем дизъюнкцией.
Например (для Карт на 2-ве переменные):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| $\overline{X1}\ \overline{X2}$ | $\overline{X1}\ X2$ | $X1\ X2$ | $X1\ \overline{X2}$ | $\overline{X2}$ | $\overline{X1}$ | $X2$ | $X1$ |
|  |  |  |  |  |  | | |
| $S1 \vee S2 =$ | $S1 \vee S2 =$ | $S1 \vee S2 =$ | $S1 \vee S2 =$ | $S1 \vee S2 =$ | $S1 \vee S2 =$ | | |
| $= X1X2 \vee$ | $= X1\overline{X2} \vee$ | $= X2 \vee X1$ | $= X1 \vee \overline{X2}$ | $= \overline{X1} \vee \overline{X2}$ | $= X2 \vee \overline{X1}$ | | |
| $\vee \overline{X1}\ \overline{X2}$ | $\vee \overline{X1} X2$ | | | | | | |

Для КНФ всё то же самое, только рассматриваем клетки с нулями, не меняющиеся переменные в пределах одной области объединяем в дизъюнкции (инверсии проставляем над единичными переменными), а дизъюнкции областей объединяем в конъюнкцию. На этом минимизация считается законченной.

# Стили представления карт Карно

Традиционно существует несколько стилей представления карт Карно. Часто в шапке и левой колонке проставляются численные значения переменных, подобно тому, как они указаны в таблице истинности (а). В этом стиле наиболее очевидно, что карта Карно является своеобразной формой представления таблицы истинности. Однако клетки карты Карно следуют в несколько ином порядке, чем строки в таблице истинности, так как в таблице истинности принято строки упорядочивать в лексикографическом нарастании двоичных чисел. Например, в карте Карно для четырёх переменных порядок следования ячеек карты и строк таблицы истинности совпадёт, если переставить местами третий-четвёртый столбцы и третью-четвёртую строки карты.

Каждая строка таблицы истинности и каждая клетка карты Карно соответствует одному слагаемому ДНФ, поэтому в шапке и левой колонке карты можно указывать вхождения переменных (прямые и инверсные), как они выглядят в СДНФ (б). Существует сокращённый вариант этого стиля представления, где во вспомогательных строках и колонках указывается, в каком виде, прямом или инверсном, представлена каждая переменная в соответствующей строке или столбце карты (в).

Наконец, в некоторых случаях на краях карты линиями указываются столбцы и строки, где соответствующая переменная представлена в прямом виде (г).

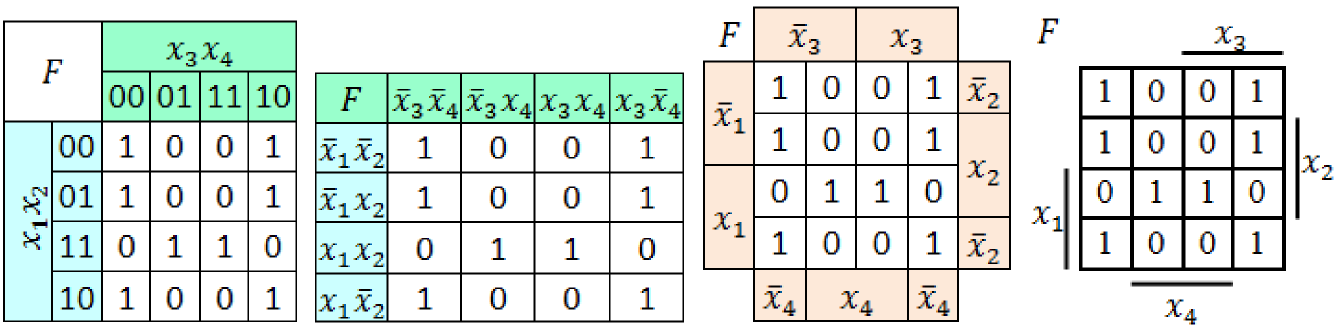



Рис 1. Стили представления карт Карно

# Порядок работы с картой Карно

Исходной информацией для работы с картой Карно является таблица истинности минимизируемой функции. Таблица истинности содержит полную информацию о логической функции, задавая её значения на всех возможных $2^n$ наборах входных переменных $X_1 \dots X_n$. Карта Карно также содержит $2^n$ клеток, каждая из которых ассоциируется с уникальным набором входных переменных $X_1 \dots X_n$. Таким образом, между таблицей истинности и картой Карно имеется взаимно однозначное соответствие, и карту Карно можно считать соответствующим образом отформатированной таблицей истинности.

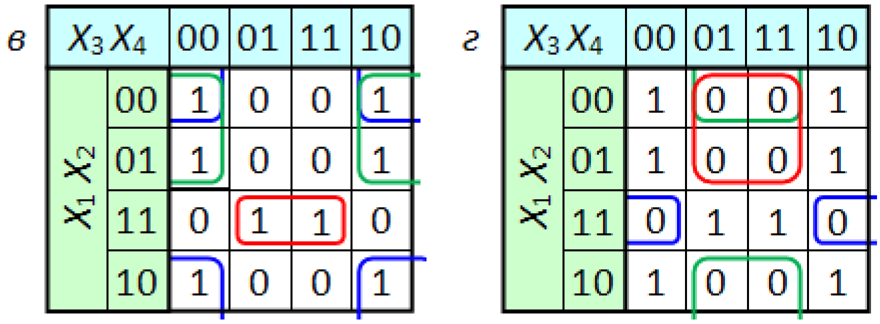
В данном разделе в качестве примера используется функция четырёх переменных, заданная таблицей истинности, изображённой на рис. 2а. Карта Карно для той же функции изображена на рис. 2б.

*а*

| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

*б*

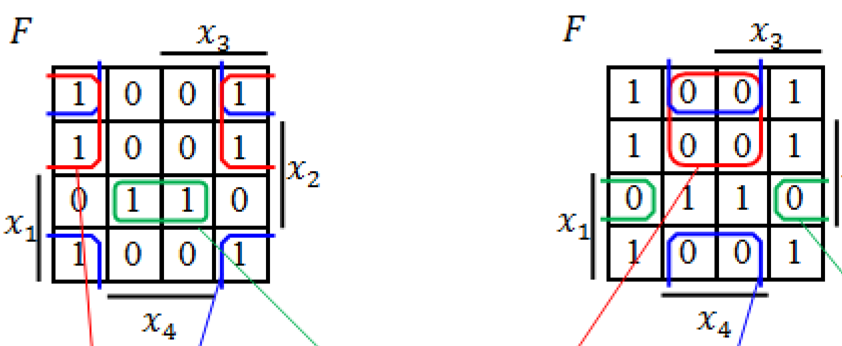
| $X_1X_2$ \ $X_3X_4$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |




## Принципы склейки

Прямоугольную область в карте Карно, которая состоит из $2^k$ одинаковых значений (единиц или нулей в зависимости от того, какую форму нужно получить) будем называть *склейкой*, *группой* или *областью*. Распределение всех имеющихся в карте Карно нулей (единиц) по склейкам будем называть *покрытием*. С целью минимизации булевой функции необходимо построить такое покрытие карты Карно, чтобы количество склеек было минимальным, а размер каждой склейки максимально возможным. Для этого необходимо руководствоваться следующими правилами.

- Склейку клеток одной и той же карты Карно можно осуществлять как по единицам (а), так и по нулям (б). Первое необходимо для получения ДНФ, второе — для получения КНФ.




а) $F = \bar{x}_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_4$ б) $F = (x_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)$

- Склеивать можно только прямоугольные области с числом единиц (нулей), являющимся целой степенью двойки (1, 2, 4, 8, 16, 32… клетки).

Так для Карты Карно на рис.1 выражение в формате ДНФ будет иметь вид:

$$f(X1, X2, X3, X4) = S1 \vee S2 \vee S3 = \overline{X1}\,\overline{X4} \vee X1X2X4 \vee \overline{X2}\,\overline{X4}$$

В формате КНФ:

$$f(X1, X2, X3, X4) = (S1)(S2)(S3) = (X1 \vee \overline{X4})(X2 \vee \overline{X4})(\overline{X1} \vee \overline{X2} \vee X4)$$

Ссылка

## ПРИМЕР

Дана таблица истинности функции F

| A | B | C | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 1 | **0** |
| 1 | 0 | 0 | **1** |
| 1 | 0 | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | **0** |

С помощью карты Карно найти минимальную дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы булевой функции F.  Построить функциональные схемы для функции F по полученным формулам

**Решение**

Составляем карту Карно для функции 3 переменных. В клетках ставим 1, если на данном наборе функция принимает значение 1 (см. таблицу истинности), в других клетках ставим 0 (или их можно оставить пустыми). Получаем (используем код Грея для обозначений строк и столбцов):

| AB\ C | 0 | 1 |
|---|---|---|
| **00** | 0 | 1 |
| **01** | 0 | 0 |
| **10** | 1 | 0 |
| **11** | 1 | 1 |

Строим сокращенную ДНФ по карте Карно. Склеиваем все соседние пары единиц, а также прямоугольники максимальной величины (те, которые участвовали в склейке, больше не склеиваем), получаем:

| **AB\ C** | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **00** | 0 | 1 |
| **01** | 0 | 0 |
| **11** | 1 | 0 |
| **10** | 1 | 1 |

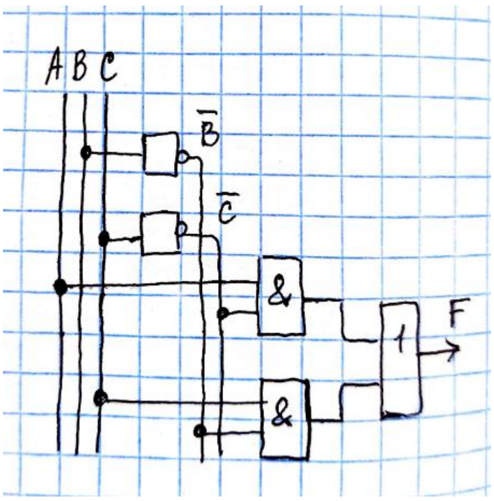
ДНФ = $A \cdot \overline{C} + C \cdot \overline{B}$

Теперь построим сокращенную КНФ по карте Карно. Склеиваем все соседние пары нулей, а также прямоугольники максимальной величины (те, которые участвовали в склейке, больше не склеиваем), получаем:

| **AB\ C** | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **00** | 0 | 1 |
| **01** | 0 | 0 |
| **11** | 1 | 0 |
| **10** | 1 | 1 |

КНФ = $(A + C) \cdot (\overline{B} + \overline{C})$

Построим функциональную схему для полученной ДНФ:




Самостоятельно постройте функциональную схему для полученной КНФ

## Задание.

С помощью карты Карно найти минимальную дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы булевой функции f.

Построить функциональные схемы для функции f по полученным формулам

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **0** | **0** | **0** | **1** | **1** |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **0** | **0** | **1** | **1** | **1** |
| **0** | **1** | **0** | **0** | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **0** | **1** | **1** | **0** | **1** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | **0** | **0** | **1** | **1** |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **1** | **1** | **0** | **0** | **1** |
| **1** | **1** | **0** | **1** | **1** |
| **1** | **1** | **1** | **0** | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Шаг 1. Построим карту Карно для функции f

| ***x3x4*** / ***x1x2*** | **00** | **01** | **11** | **10** |
|---|---|---|---|---|
| **00** | | | | |
| **01** | | | | |
| **11** | | | | |
| **10** | | | | |

.....