ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8.1. Из урны, содержащей 20 одинаковых шаров, случайным образом извлекают некоторое количество шаров. Возможности захватить любую (по количеству) группу шаров равновероятны. Пусть $P_{неч}$ и $P_{чет}$ – вероятности извлечь группу с нечетным и четным числом шаров соответственно. Тогда значение выражения $\dfrac{1}{P_{неч}-P_{чет}}$ равно …

8.1. *Ответ:* 1048575.

Решение. Пусть A_n – число групп с нечетным числом шаров при n шарах в урне, B_n – число групп с четным числом шаров.

Тогда $A_n + B_n = C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$.

Разность между числом групп с нечетным числом шаров и числом групп с четным числом шаров равно 1, так как

$$C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \ldots \pm C_n^n = C_n^0 - \left(C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots \mp C_n^n\right) = 1 - (1-1)^n = 1.$$

Тогда $P_{неч} - P_{чет} = \dfrac{1}{2^n - 1}$. Следовательно, $\dfrac{1}{P_{неч} - P_{чет}} = 2^{20} - 1 = 1048575$.

8.2. На сторонах прямоугольника независимо друг от друга случайным образом выбраны две точки.

Если стороны прямоугольника равны 5 и 7, тогда математическое ожидание квадрата расстояния между этими точками равно …

8.2. *Ответ*: 24.

Решение. При выборе двух точек наугад на любой из сторон прямоугольника возможны следующие единственно возможные и несовместные события (гипотезы):

H_1 – точки выбраны на одной и той же стороне a;

H_2 – точки выбраны на одной и той же стороне b;

H_3 – точки выбраны на смежных сторонах прямоугольника;

H_4 – точки выбраны на противоположных сторонах a;

H_5 – точки выбраны на противоположных сторонах b.

Для вероятностей этих гипотез имеем

$$P(H_1) = 2\left(\frac{a}{2p}\cdot\frac{a}{2p}\right) = \frac{a^2}{2p^2},$$

$$P(H_2) = 2\left(\frac{b}{2p}\cdot\frac{b}{2p}\right) = \frac{b^2}{2p^2},$$

$$P(H_3) = 8\left(\frac{a}{2p}\cdot\frac{b}{2p}\right) = 2\frac{ab}{2p^2},$$

$$P(H_4) = 2\left(\frac{a}{2p}\cdot\frac{a}{2p}\right) = \frac{a^2}{2p^2},$$

$$P(H_5) = 2\left(\frac{b}{2p}\cdot\frac{b}{2p}\right) = \frac{b^2}{2p^2},$$

где $2p$ – периметр прямоугольника.

Определим условное математическое ожидание (т.е. математическое ожидание при условии, что имела место гипотеза H_i) квадрата расстояния между двумя точками:

$$M\left(Z^2 \mid H_1\right) = \int_0^a\int_0^a f(x,y)(x-y)^2\,dxdy = \frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^a (x-y)^2\,dxdy = \frac{a^2}{6},$$

$$M\left(Z^2 \mid H_2\right) = \frac{1}{b^2}\int_0^b\int_0^b (x-y)^2\,dxdy = \frac{b^2}{6},$$

$$M\left(Z^2 \mid H_3\right) = \frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b (x^2+y^2)\,dxdy = \frac{a^2+b^2}{3},$$

$$M\left(Z^2 \mid H_4\right) = M(b^2 + (X-Y)^2) = b^2 + M(X-Y)^2 = b^2 + \frac{a^2}{6},$$

$$M\left(Z^2 \mid H_5\right) = M(a^2 + (X-Y)^2) = a^2 + M(X-Y)^2 = a^2 + \frac{b^2}{6}.$$

Находим полное математическое ожидание случайной величины Z^2:

$$M(Z^2) = \sum_{j=1}^{5} P(H_j)M(Z^2 \mid H_j) =$$

$$= \frac{1}{6p^2}\left(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\right) = \frac{(a+b)^4}{6p^2} = \frac{p^2}{6} = 24.$$

8.3. В офисе работает 5 сотрудников по пятидневной рабочей неделе (выходные дни у всех общие). Каждый из сотрудников случайным образом берет еще 2 выходных дня (из 5-и рабочих дней). Пусть вероятность того, что в офисе будет хотя бы один сотрудник в каждый рабочий день недели, равна P, тогда значение $10000\cdot P$ равно …

8.3. *Ответ:* 9489.

Решение. Пусть событие $A_i\left(1\le i\le 5\right)$ состоит в том, что все 5 сотрудников не вышли на работу в i-й день недели. Событие A состоит в том, что в офисе будет хотя бы один сотрудник в каждый рабочий день недели, а событие B является противоположным событию A (хотя бы один день в офисе никого не будет). Очевидно, что $B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$.

Отсюда

$$P\left(B\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + P\left(A_3\right) + P\left(A_4\right) + P\left(A_5\right) -$$
$$- P\left(A_1A_2\right) - P\left(A_1A_3\right) - P\left(A_1A_4\right) - P\left(A_1A_5\right) - \ldots - P\left(A_4A_5\right)$$

(слагаемые с вероятностями произведений трех и более событий отсутствуют, так как по условию задачи это невозможно).

Вероятность того, что любой сотрудник не выйдет на работу в i-й день, равна $p = \frac{C_4^1}{C_5^2} = \frac{4}{10}$. По условию невыходы на работу различных сотрудников независимы, поэтому $P(A_i) = p^5 = \left(\frac{4}{10}\right)^5$ при всех $1 \le i \le 5$. Аналогично вероятность того, что любой сотрудник не выйдет на работу в i-й и j-й дни недели $(i \ne j)$, равна $q = \frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, и $P(A_i A_j) = q^5 = \frac{1}{10^5}$ при всех $1 \le i, j \le 5$ $(i \ne j)$. Следовательно, $P(B) = 5\left(\frac{4}{10}\right)^5 - 10 \cdot \frac{1}{10^5} = 0{,}0511$ и вероятность события A равна $P = P(A) = 1 - 0{,}0511 = 0{,}9489$.

Тогда $10000 \cdot P = 9489$.

8.4. Монету подбросили 10 раз. Пусть вероятность того, что в последовательности результатов этого опыта **не будет** двух последовательных гербов, равна P. Тогда $1024 \cdot P$ равно …

8.4. *Ответ*: 144.

Решение. Рассмотрим задачу в более общем виде – монету подбросили n раз. Обозначим через f_n количество последовательностей результатов этого опыта, удовлетворяющих условию задачи (можно записать их как «слова» вида «ЦГЦЦГ…ЦГ», состоящие из n букв, где «Ц» – выпала цифра, «Г» – выпал герб). Такие «слова» можно получить двумя вариантами:

а) если «слово» длиной n оканчивается на «Ц», то его можно получить из любого «слова» длиной $(n-1)$ дописыванием буквы «Ц»; количество способов равно f_{n-1};

б) если «слово» длиной n оканчивается на «Г», то предыдущая буква должна быть «Ц», и его можно получить из любого «слова» длиной $(n-2)$ дописыванием букв «ЦГ», количество способов равно f_{n-2}.

Таким образом, $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ (так как все «слова» в случаях а и б – различные), $f_1 = 2, f_2 = 3$, отсюда

$f_3 = 2 + 3 = 5,$

$f_4 = 3 + 5 = 8,$

$f_5 = 5 + 8 = 13,$

$f_6 = 8 + 13 = 21,$

$f_7 = 13 + 21 = 34,$

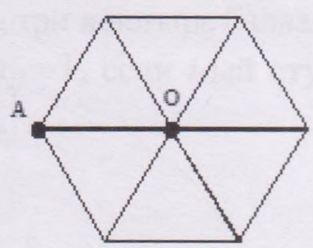
$f_8 = 21 + 34 = 55,$

$f_9 = 34 + 55 = 89,$

$f_{10} = 55 + 89 = 144.$

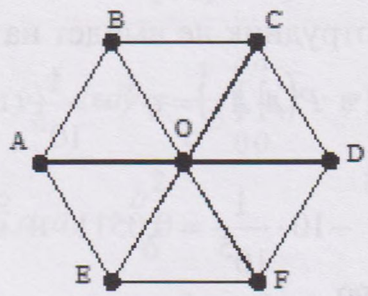
Все исходы данного опыта равновозможны, а их общее количество равно $2^{10} = 1024$. Вероятность $P = \frac{144}{1024}$, а $1024 \cdot P = 144$.

8.5. По паутине, имеющей вид правильного шестиугольника, разбитого на правильные треугольники(см. рисунок), двигается мошка. В середине паутины (точка O) сидит паук. На каждой развилке нитей паутины мошка выбирает маршрут случайным образом, в частности, может повернуть назад. Если мошка попадает в точку O, то паук ее съедает. Пусть вероятность того, что, начав прогулку по паутине в точке A, мошка в нее вернется, равна P. Тогда величина $54P$ равна …



8.5. *Ответ*: 14.

Решение



Пусть искомая вероятность равна P_A. Вероятности возвращения в точку A из вершин B, C, D, E, F (см. рисунок) обозначим P_{BA}, P_{CA}, P_{DA}, P_{EA}, P_{FA} соответственно. Из симметрии фигуры следует, что $P_{EA} = P_{BA}$ и $P_{FA} = P_{CA}$. Заметим, что $P_{OA} = 0$.

Тогда по формуле полной вероятности можно записать $P_A = \frac{1}{3}P_{BA} + \frac{1}{3}P_{EA} + \frac{1}{3}P_{OA} = \frac{2}{3}P_{BA}$, $P_{BA} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}P_{CA}$, $P_{CA} = \frac{1}{3}P_{BA} + \frac{1}{3}P_{DA}$, $P_{DA} = \frac{1}{3}P_{FA} + \frac{1}{3}P_{CA} = \frac{2}{3}P_{CA}$.

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} P_A = \frac{2}{3}P_{BA}, \\ P_{BA} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}P_{CA}, \\ P_{CA} = \frac{1}{3}P_{BA} + \frac{1}{3}P_{DA}, \\ P_{DA} = \frac{2}{3}P_{CA}. \end{cases}$$

Решая ее, находим $P_A = \frac{7}{27}$. Тогда $54P = 14$.

8.6. n шаров случайным образом размещено по n ящикам ($n \geq 3$). Обозначим через $S(n)$ среднее количество ящиков, в которые попало не менее 3 шаров. Пусть предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n}$ равен A. Тогда значение выражения $8e(1-A)$ равно …

8.6. *Ответ*: 20.

Решение. Обозначим через $S_k(n)$ – среднее количество ящиков, в которых находится ровно k шаров. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_k(n)}{n} = \frac{1}{e\cdot k!}$. Вероятность того, что в некоторый ящик попадет ровно k шаров (или средняя доля ящиков, которые содержат ровно k шаров) равна $P_n(k) = S_k(n) = C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-k} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!(n-1)^k}$. Предел этого выражения при $n\to\infty$ равен $\frac{1}{e\cdot k!}$ (так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$). Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n} = 1-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right) = 1-\frac{5}{2e}$ и $8e(1-A)=20$.

8.7. Стержень длины L ломают случайным образом и выбирают большую из полученных частей, затем эту часть ломают и снова выбирают большую часть. Пусть P – вероятность того, что длина этой части не меньше $\frac{L}{2}$. Тогда $48P$ равно …

8.7. *Ответ*: 32.

Решение. Обозначим через x положение первой точки излома, а y – второй, считая, что после первой операции относительное положение частей не изменилось (то есть x и y – это расстояния от одного из концов стержня до точек излома). Тогда случайная точка $(x; y)$ может равновозможно попасть в фигуру, представляющую собой квадрат $0\leq x\leq L, 0\leq y\leq L$, из которого вырезаны 2 треугольника: $0\leq x\leq \frac{L}{2}, 0\leq y\leq x$ и $\frac{L}{2}\leq x\leq L, x\leq y\leq L$ площадью $S=\frac{3}{4}L^2$. Если длина большей части стержня после двух операций не меньше $L/2$, то случайная точка $(x; y)$ должна попасть в один из четырех треугольников: 1) $0\leq x\leq\frac{L}{2}, x\leq y\leq\frac{L}{2}$; 2) $0\leq x\leq\frac{L}{2}, x+\frac{L}{2}\leq y\leq L$; 3) $\frac{L}{2}\leq x\leq L, 0\leq y\leq x-\frac{L}{2}$; 4) $\frac{L}{2}\leq x\leq L, \frac{L}{2}\leq y\leq x$ общей площадью $s=\frac{L^2}{2}$.

Отсюда вероятность $P=\frac{s}{S}=\frac{L^2/2}{3L^2/4}=\frac{2}{3}$. Тогда $48P=32$.

8.8. Пусть случайная величина X равна числу подбрасывания кубика до тех пор, пока не выпадут (хотя бы раз) все числа от «1» до «6», а $M(X)$ – математическое ожидание этой случайной величины. Тогда $100 \cdot M(X)$ равно …

8.8. *Ответ*: 1470.

Решение. Пусть после очередного подбрасывания кубика среди появившихся цифр есть ровно n различных. Обозначим через M_n математическое ожидание числа подбрасываний, которое еще надо сделать, чтобы появились все цифры.

При очередном подбрасывании может быть два случая:

1) с вероятностью $\frac{n}{6}$ очередная цифра совпадет с уже имеющимися, и математическое ожидание останется равным M_n;

2) с вероятностью $\frac{6-n}{n}$ появится новая цифра, и математическое ожидание станет равным M_{n+1}. Отсюда $M_n = 1 + \frac{n}{6} M_n + \frac{6-n}{6} M_{n+1}$, или $M_n = \frac{6}{6-n} + M_{n+1}$ (*).

При этом $M_6 = 0$ и нужно найти M_0. Последовательно применяя соотношение (*), получаем

$$M_0 = M_1 + \frac{6}{6} = M_2 + \frac{6}{5} + \frac{6}{6} = \ldots = M_6 + \frac{6}{1} + \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \frac{6}{5} + \frac{6}{6}.$$

В итоге получаем $M_0 = 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 14{,}7$.

Тогда $100 \cdot M(X) = 100 \cdot 14{,}7 = 1470$.