НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где промежуток интегрирования $[a;b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, называют еще *собственным интегралом.*

Рассмотрим так называемые ***несобственные интегралы***, т. е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

40.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.}$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.* Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

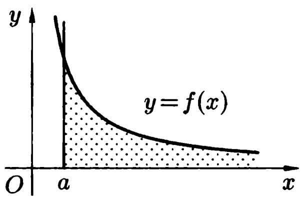

Рис. 171

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c — произвольное число. В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа. Отметим, что если непрерывная функция $f(x) \geqslant 0$ на промежутке $[a; +\infty)$ и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (см. рис. 171).

Пример 40.1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx$; 3) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$.

○ Решение: 1) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} x^{-2}\,dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_{1}^{b} = -(0-1) = 1,$
интеграл сходится;

$$2)\ \int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \sin x\Big|_{a}^{0} = 0 - \lim_{a\to-\infty} \sin a,$$

интеграл расходится, так как при $a \to -\infty$ предел $\lim\limits_{a\to-\infty} \sin a$ не существует.

$$3)\ \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty,\ \text{интеграл расходится.}$$ ●

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл; достаточно лишь знать, сходится ли он или нет.

Приведем без доказательства некоторые признаки сходимости.

Теорема 40.1 (признак сравнения). Если на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

Пример 40.2. Сходится ли интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$?

Решение: При $x \geqslant 1$ имеем $\frac{1}{x^2(1+3^x)} < \frac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$ также сходится (и его значение меньше 1). ●

Теорема 40.2. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$ ($f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$), то интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся (т. е. ведут себя одинаково в смысле сходимости).

Пример 40.3. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$.

Решение: Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$ сходится, так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2+1})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$ ●

40.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.}$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится*.

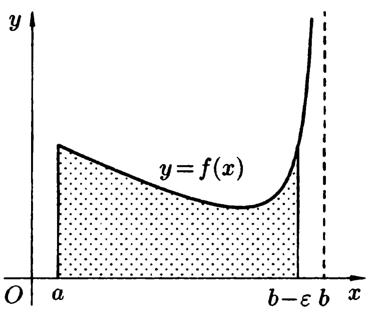

Рис. 172

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

В случае, когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (разрыв в точке $x = b$) можно истолковать геометрически как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции (см. рис. 172).

Пример 40.4. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение: При $x = 0$ функция $y = \frac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв;

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\,dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty,$$

интеграл расходится. ●

Сформулируем признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 40.3. Пусть на промежутке $[a; b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x = b$ терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. Из сходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Теорема 40.4. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a; b)$ и в точке $x = b$ терпят разрыв. Если существует предел $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример 40.5. Сходится ли интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$?

Решение: Функция $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ имеет на $[0; 1]$ единственный разрыв в точке $x = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln x\Big|_{\varepsilon}^1 = 0 - \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \varepsilon$$

расходится. И так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

то интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ также расходится. ●