

## § 42. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть требуется найти определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  от непрерывной функции  $f(x)$ . Если можно найти первообразную  $F(x)$  функции  $f(x)$ , то интеграл вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих и других случаях (например, функция  $y = f(x)$  задана графически или таблично) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

### 42.1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке  $[a; b]$ ,  $a < b$ , задана непрерывная функция  $f(x)$ . Требуется вычислить интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок  $[a; b]$ , на  $n$  равных частей (отрезков) длины  $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$  (шаг разбиения) с помощью точек  $x_0 = a$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n = b$ . Можно записать, что  $x_i = x_0 + h \cdot i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$  (см. рис. 199).

В середине  $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$  каждого такого отрезка построим ординату  $\tilde{y}_i = f(c_i)$  графика функции  $y = f(x)$ . Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью  $h \cdot \tilde{y}_i$ .

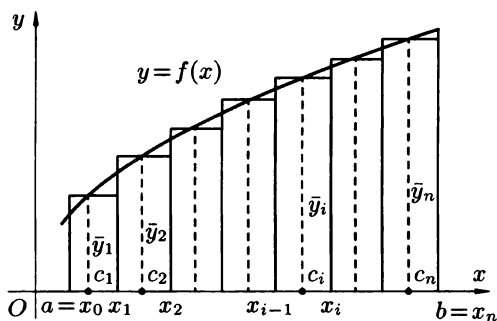


Рис. 199

Тогда сумма площадей всех  $n$  прямоугольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \quad (42.1)$$

☞ Формула (42.1) называется **формулой средних прямоугольников**.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где  $M_2$  — наибольшее значение  $|f''(x)|$  на отрезке  $[a; b]$ ,

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ( $f(x) = kx + b$ ) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае  $f''(x) = 0$ .

## 42.2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  равных частей длины  $h = \frac{b-a}{n}$ . Абсциссы точек деления  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, b = x_n$  (рис. 200). Пусть  $y_0, y_1, \dots, y_n$  — соответствующие им ординаты графика функции. Тогда

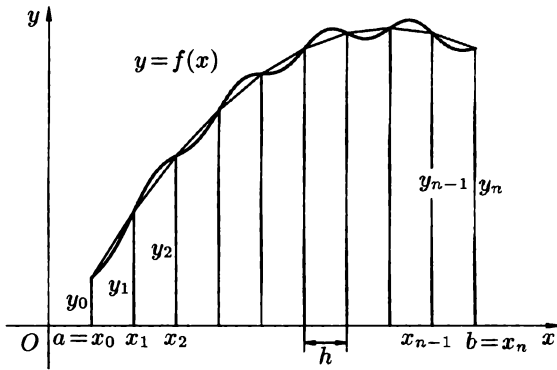


Рис. 200

расчетные формулы для этих значений примут вид  $x_i = a + h \cdot i$ ,  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Заменим кривую  $y = f(x)$  ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат  $y_i$  и  $y_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Тогда площадь криволинейной трапеции приблизительно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями  $y_i, y_{i+1}$  и высотой  $h = \frac{b-a}{n}$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (42.2)$$

☞ Формула (42.2) называется **формулой трапеций**.

**Абсолютная погрешность**  $R_n$  приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы  $|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2$ , где  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ . Снова для линейной функции  $y = kx + b$  формула (42.2) — точная.

### 42.3. Формула парабол (Симпсона)

Если заменить график функции  $y = f(x)$  на каждом отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$  разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного вычисления интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ .

Предварительно найдем площадь  $S$  криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком параболы  $y = ax^2 + bx + c$ , сбоку — прямыми  $x = -h$ ,  $x = h$  и снизу — отрезком  $[-h; h]$ .

Пусть парабола проходит через три точки  $M_1(-h; y_0)$ ,  $M_2(0; y_1)$ ,  $M_3(h; y_2)$ , где  $y_0 = ah^2 - bh + c$  — ордината параболы в точке  $x = -h$ ;  $y_1 = c$  — ордината параболы в точке  $x = 0$ ;  $y_2 = ah^2 + bh + c$  — ордината параболы в точке  $x = h$  (см. рис. 201). Площадь  $S$  равна

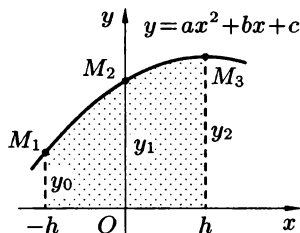


Рис. 201

$$S = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left( a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch. \quad (42.3)$$

Выразим эту площадь через  $h$ ,  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ . Из равенств для ординат  $y_i$  находим, что  $c = y_1$ ,  $a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$ . Подставляя эти значения  $c$  и  $a$  в равенство (42.3), получаем

$$S = \frac{2}{3}h^3 \cdot \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 = \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (42.4)$$

Получим теперь формулу парабол для вычисления интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ .

Для этого отрезок  $[a; b]$  разобьем на  $2n$  равных частей (отрезков) длиной  $h = \frac{b-a}{2n}$  точками  $x_i = x_0 + ih$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$ ). В точках деления  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$  вычисляем значения подынтегральной функции  $f(x)$ :  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$ , где  $y_i = f(x_i)$  (см. рис. 202).

Заменяем каждую пару соседних элементарных криволинейных трапеций с основаниями, равными  $h$ , одной элементарной параболической трапецией с основанием, равным  $2h$ . На отрезке  $[x_0; x_2]$  парабола проходит через три точки  $(x_0; y_0)$ ,  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$ . Используя формулу (42.4), находим

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

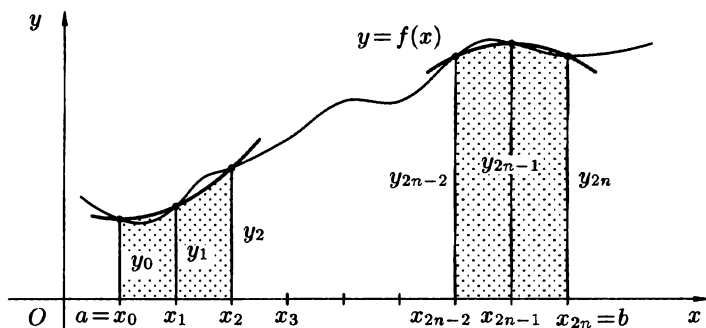


Рис. 202

Аналогично находим

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \dots,$$

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left( (y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \right). \quad (42.5)$$

☞ Формула (42.5) называется **формулой парабол** (или Симпсона). Абсолютная погрешность вычисления по формуле (42.5) оценивается соотношением

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot M_4, \quad \text{где } M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|.$$

Отметим, что формула (42.5) дает точное значение интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  во всех случаях, когда  $f(x)$  — многочлен, степень которого меньше или равна трем (тогда  $f^{IV} = 0$ ).

**Пример 42.1.** Вычислить  $\int_0^2 x^3 dx$ , разбив отрезок интегрирования  $[0, 2]$  на 4 части.

○ Решение: Имеем:  $f(x) = x^3$ ,

$$a = x_0 = 0; \quad b = x_4 = 2, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{8}; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 1;$$

$$x_3 = \frac{3}{2}, \quad y_3 = \frac{27}{8}; \quad x_4 = 2, \quad y_4 = 8;$$

(см. рис. 203)

а) по формуле прямоугольников:

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad \bar{y}_1 = \frac{1}{64}; \quad c_2 = \frac{3}{4}, \quad \bar{y}_2 = \frac{27}{64};$$

$$c_3 = \frac{5}{4}, \quad \bar{y}_3 = \frac{125}{64}; \quad c_4 = \frac{7}{4}, \quad \bar{y}_4 = \frac{343}{64},$$

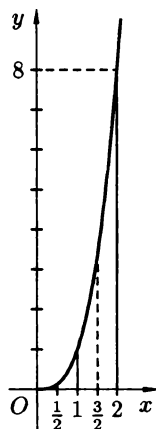


Рис. 203

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64} \right) = 3,875, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^2 x^3 dx \approx 3,875;$$

б) по формуле трапеции:

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2} \left( \frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8} \right) = 4,25, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^2 x^3 dx \approx 4,25;$$

в) по формуле парабол:

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{2}{6 \cdot 2} \left( 0 + 8 + 4 \left( \frac{1}{8} + \frac{27}{8} \right) + 2 \cdot 1 \right) = 4, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^2 x^3 dx \approx 4.$$

Точное значение интеграла  $\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 4.$

Абсолютные погрешности соответствующих формул таковы: а) 0,125; б) 0,25; в) 0. ●