Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1.1. Действительные числа, числовая ось

Одним из основных понятий в математике является понятие числа. Оно возникло в глубокой древности в результате счета и измерений и совершенствовалось. Числа бывают рациональные и иррациональные.

Рациональным называется число, которое можно представить в виде отношения p/q двух целых чисел p и q. Известно, что рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Иррациональным называется число, которое нельзя представить в виде отношения двух целых чисел. Примерами иррациональных чисел являются $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел образует множество *действительных* (*вещественных*) чисел.

Числовая ось — это прямая, на которой выбраны: точка O — начальная точка отсчета, положительное направление (на рис. 1.1 оно указано стрелкой), масштаб для измерения длины. На рис. 1.1 ось проведена горизонтально, положительное направление выбрано вправо. Действительные числа можно изображать точками числовой оси. Если число x положительное, то его изображают точкой M, для которой расстояние от начала O равно $OM = x$, а направление от точки O до точки M совпадает с положительным направлением оси; если число x_1 отрицательное, то его изображают точкой M_1, для которой расстояние от начала O равно $OM_1 = -x_1$, а направление от точки O до точки M_1 противоположно положительному направлению оси. Число x называют *координатой точки* M на оси Ox, пишут $M(x)$; x_1 — координата точки M_1, пишут $M_1(x_1)$. Иногда для координаты точки M исполь-

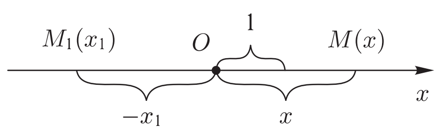

Рис. 1.1

зуется обозначение x_M. Числовую ось обозначают Ox и называют *координатной*, или *осью координат*.

Без обоснования: между всеми действительными числами и всеми точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому числу x отвечает определенная точка M числовой оси и, наоборот, каждой точке M числовой оси отвечает определенное действительное число, которое изображается этой точкой. В дальнейшем вместо «точка M с координатой x» будем говорить «точка x» и число x будем писать рядом с точкой M.

Абсолютной величиной (модулем) числа x называется число, обозначаемое $|x|$ и равное

$$|x| = \left[\begin{array}{rl} x & \text{при } x \geqslant 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{array}\right.$$

Ясно, что абсолютная величина $|x|$ числа x — это расстояние от точки x до начала O.

§ 1.2. Декартовы координаты. Полярные координаты

Декартовы координаты. Пусть в пространстве заданы три взаимно перпендикулярные числовые оси Ox, Oy и Oz с общим началом O и общим масштабом (рис. 1.2). Будем говорить, что в пространстве введена *система координат* $Oxyz$, а указанные числовые оси называть *осями координат*. Пространство обозначается R_3. Плоскости, проходящие через оси координат, называются *координатными* и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz. Пусть M — произвольная точка пространства, M_1, M_2, M_3 — проекции точки M на оси Ox, Oy и Oz, т. е. это точки пересечения соответственно с осями Ox, Oy и Oz плоскостей, проведенных через точку M перпендикулярно к этим осям (рис. 1.2).

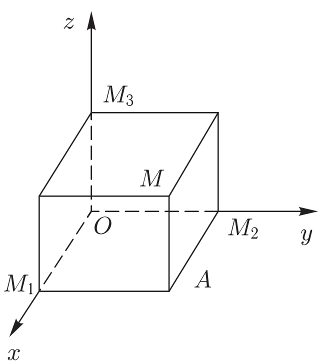

Рис. 1.2

Пусть x, y, z — координаты точек M_1, M_2, M_3 на соответствующих осях. Эти числа называются *координатами точки* M в пространстве $Oxyz$. При этом пишут $M(x, y, z)$, где x — *абсцисса*, y — *ордината*, z — *аппликата*. Таким образом, каждой точке пространства $Oxyz$ отвечают три числа — координаты этой точки. Ясно, что и, наоборот, каждой тройке чисел в указанном пространстве отвечает определенная точка.

Оси координат Ox и Oy на плоскости образуют систему координат Oxy. Пусть M_1, M_2 — проекции точки A на оси Ox и Oy (рис. 1.2). Они являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки A на оси Ox и Oy соответственно. Пусть x и y — координаты точек соответственно M_1 и M_2. Числа x и y называются *координатами точки A на плоскости*. Этот факт записывают в виде $A(x, y)$. Плоскость указанной системы координат обозначают R_2.

Описанные выше системы координат в пространстве и на плоскости называют *прямоугольными декартовыми*. Система координат, изображенная на рис. 1.2, называется *правой*.

Полярные координаты на плоскости. Возьмем на плоскости положительную полуось Ox, т. е. ту часть оси, где $x \geqslant 0$. Пусть A — произвольная точка плоскости, отличная от O, и ρ — расстояние от точки A до начала O, θ — угол, образованный отрезком OA с осью Ox и отсчитываемый от оси Ox в направлении против хода часовой стрелки, причем $0 \leqslant \theta < 2\pi$ (рис. 1.3). Числа θ и ρ называются *полярными координатами точки A*, причем ρ — *полярный радиус*, θ — *полярный угол*, O — полюс, положительная полуось Ox — *полярная ось* (под положительной полуосью понимается множество всех точек числовой оси, координаты которых положительны). Если точка A совпадает с полюсом O, то для нее $\rho = 0$, а в качестве θ можно взять любое значение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

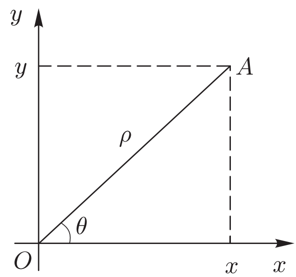

Рис. 1.3

Пусть Oxy — декартова система координат в рассматриваемой плоскости, x, y — декартовы координаты точки A. Из рис. 1.3 видно, что $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Эти формулы выражают декартовы координаты точки A через ее полярные координаты.

Угол θ, отсчитываемый от оси Ox по ходу часовой стрелки, будем считать отрицательным. В дальнейшем в некоторых случаях будем считать, что угол θ удовлетворяет условию $-\pi < \theta \leqslant \pi$ или $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \dfrac{3\pi}{2}$. Отметим также, что в качестве полярного угла можно брать угол $\theta + 2\pi k$, где k — любое целое число.

§ 1.3. Векторы, линейные операции над ними

Скалярной называется величина, которая полностью определяется своим численным значением. Примерами скалярных величин являются длина, площадь, объем, масса. *Вектором* называется направленный отрезок прямой, соединяющий две точки в пространстве (рис. 1.4). Если A и B — начало и конец вектора, то он обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

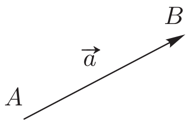

Рис. 1.4

Длиной (*модулем*) *вектора* называется число, равное длине отрезка, соединяющего начало и конец вектора. Длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}| = AB$ или $|\vec{a}| = a$. Если начало вектора совпадает с концом, то вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$.

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют *равными* (в этом случае пишут $\vec{a} = \vec{b}$), если:

— равны их длины ($|a| = |b|$);

— они коллинеарны;

— они сонаправлены.

Следовательно, при параллельном переносе вектора получим вектор, равный исходному.

Сложение векторов. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ перенесем параллельно самому себе и поместим его начало в конец вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$. Ясно, что сумму двух векторов можно получить иначе: построить $\vec{a}$, $\vec{b}$ с началом в общей точке, затем достроить на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм. Тогда его диагональ, выходящая из общего начала, будет суммой исходных векторов (рис. 1.5). Указанный метод легко распространяется на случаи трех

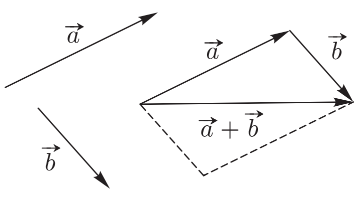

Рис. 1.5

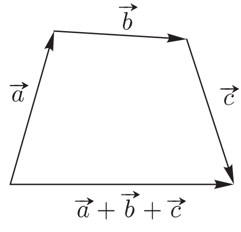

Рис. 1.6

и большего числа векторов: от конца первого строим второй, от конца второго — третий и т. д., тогда вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец — с концом последнего, и будет суммой рассматриваемых векторов (рис. 1.6).

Свойства сложения векторов:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c};$$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Эти свойства проверяются с помощью построения.

Разность векторов. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим эти векторы с началом в общей точке. Тогда вектор, начало которого совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец — с концом вектора $\vec{a}$, называется *разностью векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}-\vec{b}$ (рис. 1.7). Из рисунка видно, что $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$.

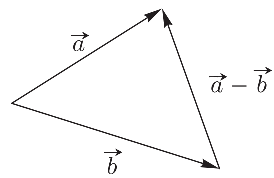

Рис. 1.7

Умножение вектора на число. Даны ненулевой вектор $\vec{a}$ и число $\lambda \neq 0$. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\vec{c}=\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$, который:

— коллинеарен $\vec{a}$;

— имеет длину $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

— направлен так же, как и $\vec{a}$, при $\lambda>0$, и противоположно при $\lambda<0$.

Свойства умножения вектора на число:

— $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$;

— $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$;

— $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})=\mu\cdot(\lambda\cdot\vec{a})$.

Эти свойства доказываются построением.

Приведем еще одно соотношение. Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Вектор $\vec{a}^{\,0}$, который коллинеарен $\vec{a}$, направлен, как $\vec{a}$, причем $|\vec{a}^{\,0}|=1$, называется *единичным*. Рассмотрим произведение $\vec{a}^{\,0}|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}^{\,0}$ на длину вектора $\vec{a}$. По определению это есть вектор, который:

— имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, так как $|\vec{a}^{\,0}|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|$;

— коллинеарен вектору $\vec{a}^{\,0}$, следовательно, и вектору $\vec{a}$;

— направлен, как $\vec{a}^{\,0}$ значит, и как $\vec{a}$, поскольку множитель $|\vec{a}|$ — число положительное.

Таким образом, мы получили вектор, равный $\vec{a}$. Итак,

$$\vec{a}=\vec{a}^{\,0}|\vec{a}|. \tag{1.1}$$

Отметим также, что вместо $(-1)\vec{a}$ пишут $-\vec{a}$.

§ 1.4. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана некоторая числовая (координатная) ось l с началом в точке O; $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ есть вектор, произвольно расположенный в пространстве (рис. 1.8). Пусть A_1 и B_1 — проекции на ось l

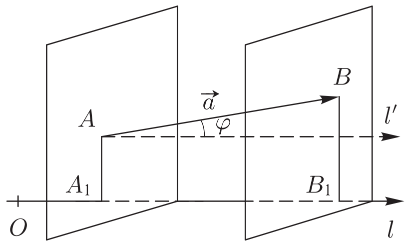

Рис. 1.8

соответственно начала A и конца B рассматриваемого вектора (т. е. A_1 и B_1 — точки пересечения с осью l плоскостей, перпендикулярных оси l и проведенных через точки A и B). Разность $x_{B_1} - x_{A_1}$ между координатами проекций конца и начала вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось l называется *проекцией вектора на ось* l и обозначается $\text{пр}_l\, \vec{a} = \text{пр}_l\, \overrightarrow{AB}$. Итак,

$$\text{пр}_l\, \vec{a} = x_{B_1} - x_{A_1}. \tag{1.2}$$

Под углом φ между ненулевым вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и осью l в пространстве понимается угол между этим вектором и осью l', которая параллельна оси l, направлена, как l, и проходит через точку A — начало вектора. Этот угол всегда считается неотрицательным и измеряется в пределах $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Легко проверить, что

$$\text{пр}_l\, \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi. \tag{1.3}$$

Итак, проекция вектора на ось равна произведению его длины на косинус угла между вектором и осью. Эта формула становится очевидной, если вектор $\vec{a}$ перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало A лежало на оси l, например, совпало с точкой A_1.

§ 1.5. Разложение вектора по базисным векторам

Возьмем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Здесь и в дальнейшем будем считать, что эта система правая, т. е. такая, для которой поворот от оси Ox к оси Oy на угол, меньший π, совершается в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть на плоскость Oxy из какой-либо точки положительной полуоси Oz. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, лежащие на осях Ox, Oy, Oz соответственно и направленные как эти оси, а их начала совпадают с началом координат O (рис. 1.9). Эти векторы называются *базисными* (*основными*).

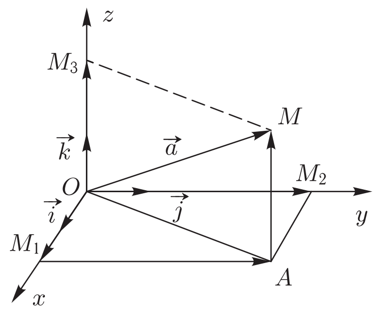

Рис. 1.9

Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор в системе координат $Oxyz$. Перенесем его параллельно самому себе так, чтобы начало вектора совпало с точкой O. Получим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Пусть M_1, M_2 и M_3 — проекции точки M на оси Ox, Oy и Oz соответственно. Из рис. 1.9 видно, что

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{M_1A} = \overrightarrow{OM_2}, \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM_3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} \quad (1.4)$$

Пусть a_x, a_y, a_z — проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно. Так как a_x — проекция $\vec{a}$ на ось Ox, то по формуле (1.2) имеем $a_x = x_{M_1} - x_O$; так как $x_O = 0$, то

$$a_x = x_{M_1}. \quad (1.5)$$

Пусть $a_x = x_{M_1} > 0$, как показано на рис. 1.9. В этом случае $x_{M_1} = OM_1 = |\overrightarrow{OM_1}|$. По формуле (1.1) имеем $\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}|\,\vec{i}$, но $|\overrightarrow{OM_1}| = x_{M_1} = a_x$, поэтому $\overrightarrow{OM_1} = a_x\vec{i}$. Легко проверить, что эта формула остается справедливой при $a_x = x_{M_1} < 0$ (при этом вектор $\overrightarrow{OM_1}$ будет направлен противоположно $\vec{i}$). Аналогично будем иметь $\overrightarrow{OM_2} = a_y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = a_z\vec{k}$. Подставим эти выражения в (1.4):

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \quad (1.6)$$

Получили формулу, которая называется *разложением вектора по базисным векторам*. Коротко ее записывают в виде $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, подчеркивая, что задание вектора в пространстве равносильно заданию трех чисел — проекций этого вектора на оси координат. Числа a_x, a_y, a_z называют также *координатами* $\vec{a}$ *по отношению к базисным векторам* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Слагаемые векторы правой части (1.6) называют *составляющими* вектора $\vec{a}$.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ с началом в точке O — начале координат — называется *радиус-вектором точки* M, конца этого вектора. Покажем, что проекции радиус-вектора точки M на оси координат равны координатам этой точки.

Пусть точка M имеет координаты (x, y, z) в рассматриваемой системе $Oxyz$. По определению абсциссы точки M имеем $x = x_{M_1}$, где x_{M_1} — координата точки M_1. Но согласно (1.5) проекция a_x вектора $\vec{a}$ на ось Ox равна x_{M_1}, т. е. $x = a_x$. Аналогично $y = a_y$, $z = a_z$. Итак, $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$.

§ 1.6. Линейные операции над векторами, заданными своими проекциями

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Разложим векторы по формуле (1.6): $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Эти соотношения почленно сложим и учтем, что по свойству умножения вектора на число $a_x\vec{i} + b_x\vec{i} = (a_x + b_x)\vec{i}$ и т. п. Получим $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$, или

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \tag{1.7}$$

Аналогично для разности

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z). \tag{1.8}$$

Точно так же для произведения λ и $\vec{a}$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \tag{1.9}$$

Формула (1.7) показывает, что проекция суммы векторов на ось координат равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось. Подобное утверждение имеет место и для формулы (1.8). Формула (1.9) показывает, что при умножении вектора на число λ умножаются на это же число все проекции вектора.

§ 1.7. Длина вектора. Расстояние между двумя точками

Пусть вектор $\vec{a}$ задан своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Перенесем его параллельно себе так, чтобы его начало совпало с началом координат. Получим $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Из рис. 1.9 видно, что

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2.$$

Согласно (1.5) $|\overrightarrow{OM_1}|^2 = x_{M_1}^2 = a_x^2$, аналогично $|\overrightarrow{OM_2}|^2 = a_y^2$ и $|\overrightarrow{OM_3}|^2 = a_z^2$ Эти числа подставим в предыдущую формулу и получим

$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. Извлечем квадратный корень и найдем длину вектора:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.10}$$

Задача. Пусть в пространстве $Oxyz$ точки A и B заданы координатами $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 1.10). Нужно найти расстояние между ними.

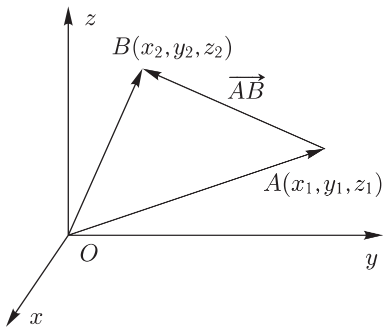

Рис. 1.10

Так как координаты точки A равны проекциям на оси координат радиус-вектора этой точки, то $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$. Согласно (1.8) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, но $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$. Значит, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Отсюда видно, что проекции вектора на оси координат равны разностям соответствующих координат его конца и начала. Зная проекции $\overrightarrow{AB}$, по формуле (1.10) найдем длину вектора $\overrightarrow{AB}$, следовательно, и расстояние между точками A и B:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

§ 1.8. Направляющие косинусы вектора

Пусть в пространстве $Oxyz$ задан ненулевой вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Поместим его начало в начало координат. Пусть α, β, γ — углы, образованные вектором $\vec{a}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 1.11). По формуле (1.3) для проекций этого вектора на оси координат имеем

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma. \tag{1.11}$$

В правые части вместо $|\vec{a}|$ подставим выражение (1.10) и найдем косинусы углов:

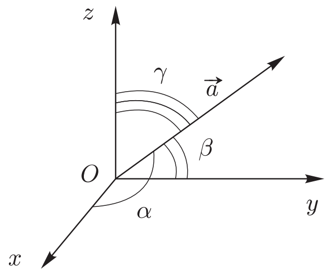

Рис. 1.11

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$
$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \tag{1.12}$$

Они называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$. Если все равенства в (1.12) возвести в квадрат и почленно сложить, то получим $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Для единичного вектора, у которого $|\vec{a}^{\,0}| = 1$, формулы (1.11) примут вид $a_x = \cos\alpha$, $a_y = \cos\beta$, $a_z = \cos\gamma$. Отсюда $\vec{a}^{\,0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

§ 1.9. Скалярное произведение, угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов

Даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых расположены в одной точке, а угол между векторами равен φ. Такое расположение мы всегда можем получить, перенеся один из векторов параллельно.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$ (либо $\vec{a}\,\vec{b}$) и определяется как число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi. \tag{1.13}$$

Из определения проекции ясно, что $|\vec{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}$ (проекция $\vec{b}$ на $\vec{a}$, точнее на ось, направленную как $\vec{a}$, на которой лежит $\vec{a}$). С учетом этого соотношения формулу (1.13) запишем так:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}. \tag{1.14}$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного вектора и проекции другого вектора на направление первого.

Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать также $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

— $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

— $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$, где λ — скалярный множитель;

— $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.

Первое свойство показывает, что сомножители можно поменять местами; второе — что постоянный скалярный множитель можно вынести за знак скалярного произведения; третье — что при скалярном умножении векторов можно использовать правило умножения многочленов. Первые два свойства проверяются на основании определения скалярного произведения векторов, т.е. с помощью формулы (1.13). Докажем третье свойство.

С учетом (1.14) запишем

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} + \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{c}) = \\ = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} + |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}).$$

Пусть векторы заданы своими проекциями: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, поэтому $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Сначала для произведений базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ докажем справедливость соотношений

$$(\vec{i}, \vec{i}) = 1; \quad (\vec{j}, \vec{j}) = 1; \quad (\vec{k}, \vec{k}) = 1; \tag{1.15}$$

$$(\vec{i}, \vec{j}) = 0; \quad (\vec{j}, \vec{k}) = 0; \quad (\vec{i}, \vec{k}) = 0. \tag{1.16}$$

Действительно, по формуле (1.13) имеем $(\vec{i}, \vec{i}) = |\vec{i}|\,|\vec{i}| \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{i}})$, поэтому $(\vec{i}, \vec{i}) = 1$. Далее, $(\vec{i}, \vec{j}) = |\vec{i}|\,|\vec{j}| \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = 0$. Остальные равенства в (1.15) и (1.16) доказываются аналогично.

Запишем скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}).$$

Использовав второе и третье свойства скалярного произведения, будем иметь

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_xb_x(\vec{i}, \vec{i}) + a_xb_y(\vec{i}, \vec{j}) + a_xb_z(\vec{i}, \vec{k}) + \\ + a_yb_x(\vec{j}, \vec{i}) + a_yb_y(\vec{j}, \vec{j}) + a_yb_z(\vec{j}, \vec{k}) + \\ + a_zb_x(\vec{k}, \vec{i}) + a_zb_y(\vec{k}, \vec{j}) + a_zb_z(\vec{k}, \vec{k}).$$

Отсюда с учетом (1.15) и (1.16) получим

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{1.17}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций этих векторов.

Вычисление угла между векторами. Запишем $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через проекции с использованием формулы (1.10). Из (1.13) следует, что $\cos\varphi = (\vec{a}, \vec{b})/(|\vec{a}|\,|\vec{b}|)$. Следовательно, согласно (1.17)

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\,\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}}. \tag{1.18}$$

Зная $\cos\varphi$, найдем угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов. Если для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, то вектор $\vec{a}$ ортогонален вектору $\vec{b}$.

В самом деле, пусть $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, тогда согласно (1.13) имеем $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Так как $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Значит, $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \pi/2$, т. е. векторы ортогональны.

Условие ортогональности двух векторов с учетом (1.17) можно записать следующим образом: $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

§ 1.10. Определители второго и третьего порядков. Векторное произведение, условие коллинеарности двух векторов, площадь треугольника

Определители второго и третьего порядков. Пусть даны четыре числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} *Определителем второго порядка* называют число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

где левая часть формулы — обозначение определителя.

Пусть даны девять чисел a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}. *Определителем третьего порядка* называется число, определяемое формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Левая часть формулы — обозначение определителя третьего порядка. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} называются *элементами определителя*. Будем обозначать их a_{ij}, где i — номер строки, j — номер столбца, которым принадлежит элемент.

Минором, соответствующим элементу a_{ij} определителя третьего порядка, называется число M_{ij}, равное определителю второго порядка, получаемому вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называют число, определяемое формулой $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Это число равно M_{ij}, если $i+j$ четно, и равно $-M_{ij}$, если $i+j$ нечетно. Из этого определения следует, например, что:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, формула определителя третьего порядка примет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Можно сделать вывод, что определитель третьего порядка есть сумма произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения. Легко проверить, что сказанное справедливо для элементов любой строки (любого столбца) определителя, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Векторное произведение. Даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построим их, поместив начала в общей точке и обозначив φ угол между ними (рис. 1.12). *Векторным произведением двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор (обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), который обладает свойствами:

— $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, т. е. длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на $\vec{a}$, $\vec{b}$ как на сторонах;

— $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости указанного параллелограмма;

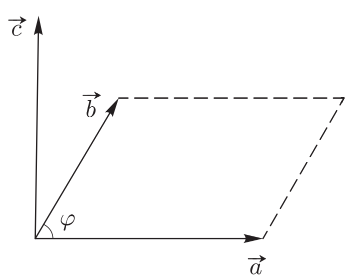

Рис. 1.12

— вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ совершается против хода часовой стрелки.

Для векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ применяют и другие обозначения: $[\vec{a} \times \vec{b}]$, $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:
— $\vec{a}\times\vec{b} = -[\vec{b}\times\vec{a}]$;
— $[\lambda\vec{a}\times\vec{b}] = [\vec{a}\times\lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}\times\vec{b}]$;
— $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

Первые два свойства доказываются построением. Докажем справедливость последнего равенства. Вначале отметим, что любой вектор $\vec{b}$ можно представить в виде $\vec{b}=\vec{b_0}+\vec{b_1}$, где вектор $\vec{b_0}$ коллинеарен $\vec{a}$, а вектор $\vec{b_1}$ ортогонален $\vec{a}$ (рис. 1.13; частные случаи, когда один из векторов $\vec{b_0}$, $\vec{b_1}$ является нулевым, здесь не рассматриваются). Чтобы в этом убедиться, достаточно через начало вектора $\vec{b}$ провести прямую, параллельную $\vec{a}$, через конец вектора $\vec{b}$ провести плоскость, перпендикулярную $\vec{a}$, точка их пересечения служит концом $\vec{b_0}$ и началом $\vec{b_1}$ (начало $\vec{b_0}$ совпадает с началом $\vec{b}$, конец $\vec{b_1}$ — с концом $\vec{b}$).

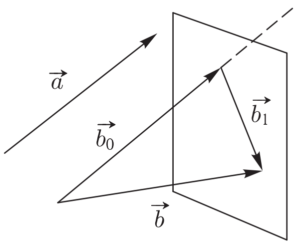

Рис. 1.13

Замечая, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}=\vec{b_0}+\vec{b_1}$, равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b_1}$, поскольку они имеют общую сторону a, одну и ту же высоту b_1, заключаем, что

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times(\vec{b_0}+\vec{b_1}) = \vec{a}\times\vec{b_1}.$$

Аналогично для вектора $\vec{c}=\vec{c_0}+\vec{c_1}$, где вектор $\vec{c_0}$ коллинеарен $\vec{a}$, а вектор $\vec{c_1}$ ортогонален $\vec{a}$, будем иметь

$$\vec{a}\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{c_0}+\vec{c_1}) = \vec{a}\times\vec{c_1}.$$

Покажем, что

$$\vec{a}\times(\vec{b_1}+\vec{c_1}) = \vec{a}\times\vec{b_1}+\vec{a}\times\vec{c_1}, \quad \text{или} \quad \vec{d}=\vec{d_b}+\vec{d_c},$$

где $\vec{d}=\vec{a}\times(\vec{b_1}+\vec{c_1})$, $\vec{d_b}=\vec{a}\times\vec{b_1}$, $\vec{d_c}=\vec{a}\times\vec{c_1}$ суть векторы, лежащие в одной плоскости, так как они перпендикулярны $\vec{a}$. Здесь имеем

$$|\vec{d_b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b_1}|, \quad |\vec{d_c}| = |\vec{a}|\,|\vec{c_1}|,$$

поскольку вектор $\vec{a}$ ортогонален и $\vec{b_1}$, и $\vec{c_1}$. Кроме того, $|\vec{d}| = |\vec{a}|\,|\vec{b_1}+\vec{c_1}|$.

Заметим, что $(\widehat{\vec{d_b},\vec{d_c}}) = (\widehat{\vec{b_1},\vec{c_1}})$, так как вектор $\vec{d_b}$ ортогонален $\vec{b_1}$, а вектор $\vec{d_c}$ ортогонален $\vec{c_1}$. Но $\vec{d}$ ортогонален $\vec{b_1}+\vec{c_1}$, поэтому угол

$(\widehat{\vec{d_b}, \vec{d}})$ равен углу между векторами $\vec{b_1}$ и $\vec{b_1}+\vec{c_1}$ (рис. 1.14). Таким образом, векторы $\vec{d}$, $\vec{d_b}$, $\vec{d_c}$ получаются поворотом вокруг $\vec{a}$ соответственно векторов $\vec{b_1}+\vec{c_1}$, $\vec{b_1}$, $\vec{c_1}$ на угол $\pi/2$ в одном и том же направлении (против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{a}$) и умножением их на $|\vec{a}|$. Это означает, что $\vec{d}=\vec{d_b}+\vec{d_c}$. Учитывая, что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{b_0}+\vec{c_0}+\vec{b_1}+\vec{c_1}$, где $\vec{b_0}+\vec{c_0}$ — вектор, коллинеарный $\vec{a}$, а вектор $\vec{b_1}+\vec{c_1}$ ортогонален $\vec{a}$, и приняв во внимание предыдущие соотношения, имеем

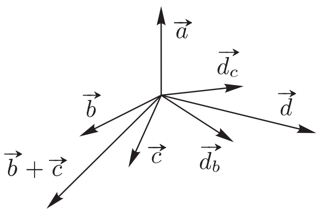

Рис. 1.14

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) =$$
$$= \vec{a}\times(\vec{b_0}+\vec{c_0}+\vec{b_1}+\vec{c_1}) = \vec{a}\times(\vec{b_1}+\vec{c_1}) =$$
$$= \vec{a}\times\vec{b_1}+\vec{a}\times\vec{c_1} = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},$$

что и требовалось.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями: $\vec{a}=(a_x,\, a_y,\, a_z)$, $\vec{b}=(b_x,\, b_y,\, b_z)$. Тогда $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Сначала рассмотрим векторные произведения базисных векторов.

С помощью определения векторного произведения покажем справедливость равенств

$$\begin{aligned} &\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}; \quad &&\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}; \quad &&\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\\ &\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}; \quad &&\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}; \quad &&\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}; \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}; \qquad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}; \qquad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}. \tag{1.20}$$

Пусть $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ обладает свойствами:

— $|\vec{c}|=|\vec{i}\,||\vec{j}\,|\sin(\widehat{\vec{i},\vec{j}})=1\cdot1\cdot1=1$;
— $\vec{c}\perp\vec{i}$, $\vec{c}\perp\vec{j}$, т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$;
— $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от $\vec{i}$ к $\vec{j}$ совершается против хода часовой стрелки, т. е. $\vec{c}$ совпадает с $\vec{k}$.

Следовательно, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$.

Покажем, что $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$. Пусть $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{c}$, тогда $|\vec{c}|= =|\vec{i}\,||\vec{i}\,|\sin(\widehat{\vec{i},\vec{i}})=\vec{0}$, $\vec{c}=\vec{0}$, т. е. $\vec{i}\times\vec{i}=0$.

Аналогично доказываются остальные равенства (1.19) и (1.20).

Рассмотрим векторное произведение

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}).$$

Использовав последние два свойства векторного произведения, запишем

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_x b_x[\vec{i}\times\vec{i}\,] + a_x b_y[\vec{i}\times\vec{j}\,] + a_x b_z[\vec{i}\times\vec{k}\,] + \\ + a_y b_x[\vec{j}\times\vec{i}\,] + a_y b_y[\vec{j}\times\vec{j}\,] + a_y b_z[\vec{j}\times\vec{k}\,] + \\ + a_z b_x[\vec{k}\times\vec{i}\,] + a_z b_y[\vec{k}\times\vec{j}\,] + a_z b_z[\vec{k}\times\vec{k}\,].$$

Отсюда с учетом (1.19) и (1.20) имеем

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_x b_y\vec{k} - a_x b_z\vec{j} - a_y b_x\vec{k} + a_y b_z\vec{i} + a_z b_x\vec{j} - a_z b_y\vec{i}\,.$$

Итак,

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}\,. \tag{1.21}$$

Следовательно (§ 1.1),

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \tag{1.22}$$

Эту формулу можно записать так:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.23}$$

Здесь считается, что правые части формул (1.22), (1.23) равны, тем самым вводится понятие определителя третьего порядка, в котором элементы первой строки суть векторы.

Таким образом, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими проекциями, то векторное произведение двух векторов определяется по формуле (1.23).

Условие коллинеарности двух векторов. Если для ненулевых векторов выполняется условие $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. В самом деле, если $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi = 0$ и $\sin\varphi = 0$, т. е. $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ коллинеарны.

В этом случае из (1.21) имеем $a_y b_z - a_z b_y = 0$, $a_x b_z - a_z b_x = 0$, $a_x b_y - a_y b_x = 0$. Значит, $a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z$. Это и есть *условие коллинеарности двух векторов*, заданных своими проекциями.

Задача. Определить площадь треугольника, заданного своими вершинами.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ — вершины треугольника в пространстве $Oxyz$, а их координаты — заданные числа. Найдем векторы (§ 1.7)

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

векторное произведение которых обозначим $\vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Тогда согласно (1.22)

$$d_x = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \quad d_y = -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

$$d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

и $|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, равна найденному числу $|\vec{d}|$, поэтому искомая площадь треугольника определяется по формуле $S_\Delta = |\vec{d}|/2$.

§ 1.11. Смешанное произведение и его геометрический смысл. Условие компланарности векторов

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Определим вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Этот вектор умножим скалярно на $\vec{c}$ и получим число $(\vec{d}, \vec{c})$, которое называется *смешанным* (*векторно-скалярным*) *произведением трех исходных векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и обозначается

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{d}, \vec{c}) = ([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c}). \tag{1.24}$$

Рассмотрим это смешанное произведение, когда векторы заданы своими проекциями:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Проекции вектора $\vec{d}$ на оси координат определяются по формуле (1.22).

Скалярное произведение векторов $\vec{d}$ и $\vec{c}$ равно сумме произведений одноименных проекций:

$$(\vec{d}, \vec{c}) = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Левая часть этой формулы — смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, а правую часть запишем в виде определителя третьего порядка:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.25}$$

Эта формула позволяет вычислить смешанное произведение векторов, заданных своими проекциями.

Геометрический смысл смешанного произведения. Даны ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построим эти векторы, поместив их начала в общей точке, а затем на них, как на ребрах, построим параллелепипед (рис. 1.15). Построим вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, перпендикулярный плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. перпендикулярный к нижнему основанию параллелепипеда. Длина $|\vec{d}|$ равна площади S

нижнего основания параллелепипеда (т. е. площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах). Через конец $\vec{c}$ проведем плоскость, перпендикулярную $\vec{d}$ (ясно, что верхнее основание параллелепипеда лежит в этой плоскости). Эта плоскость пересечет вектор $\vec{d}$ (или его продолжение) в точке K (K — проекция конца вектора $\vec{c}$ на указанную линию). Из построения следует, что расстояние OK равно высоте h параллелепипеда. Пусть φ — угол между $\vec{d}$ и $\vec{c}$. На рис. 1.15 изображен случай, когда $\varphi < \pi/2$, при этом $OK = h = |\vec{c}|\cos\varphi$. Смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{d}, \vec{c}) = |\vec{d}|\,|\vec{c}|\cos\varphi$. Но $|\vec{d}| = S$ и $h = |\vec{c}|\cos\varphi$. Поэтому $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = Sh = V$, где V — объем параллелепипеда. Этот результат мы получили для случая $\varphi < \pi/2$. Если $\varphi > \pi/2$, то вектор $\vec{c}$ лежит ниже плоскости векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, при этом $OK = h = -|\vec{c}|\cos\varphi$ и $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -Sh = -V$. Итак, справедлива формула

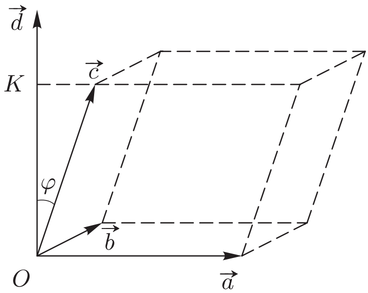

Рис. 1.15

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V, \tag{1.26}$$

где V — объем параллелепипеда. При $\varphi = \pi/2$ обе части формулы (1.26) равны нулю.

Определение. Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости.

Условие компланарности трех векторов. Если для трех ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется условие

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0, \tag{1.27}$$

то эти векторы компланарны.

Действительно, в этом случае согласно (1.26) имеем $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V = \pm Sh = 0$. Отсюда следует, что три вектора лежат в одной плоскости, так как $S = 0$ или $h = 0$.

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими проекциями, то условие компланарности (1.27) с учетом (1.25) можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие проверяется непосредственно по заданным проекциям рассматриваемых векторов.