§ 5. Конечные суммы

Выражения $F(1)+F(2)+...+F(n), \sum_{k=1}^{n} F(k), \sum_{1\le k\le n} F(k)$, содержащие переменную *n*, которая в качестве значений принимает натуральные числа, принято называть *конечными суммами* (число слагаемых в такой сумме конечно), а замену этих выражений на равносильные выражения, являющиеся явными формулами, называют вычислением конечных сумм. Явной формулой называют выражение, которое содержит только числа (записанные в десятичной системе), переменные и элементарные функции.

Мы часто используем готовые формулы для ряда нужных нам сумм, например, известные со школы формулы суммы членов арифметической или геометрической прогрессии, суммы квадратов первых натуральных чисел и т. д. Но не всегда знаем, как они получены, и какие, вообще, существуют методы суммирования конечных сумм.

Дискретная математика дает целый арсенал методов для исчисления конечных сумм. Учитель имеет возможность выбрать любой метод в зависимости от своих целей. Рассмотрим ряд некоторых из них.

1.метод. Метод преобразования сумм

Суть этого метода заключается в том, что для исчисления конечных сумм мы применяем известные три закона преобразования сумм: распределительный, сочетательный и переместительный.

Пример. Рассмотрим ряд подходов к выводу формулы для суммы *(n+1)* первых членов любой арифметической прогрессии.

1 подход. Рассмотрим сумму *1+2+3+…+n* первых *n* натуральных чисел в двух видах:

$$S_n = 1+2+...+(n-1)+n$$
$$S_n = n+(n-1)+..+2+1$$

Складывая эти равенства почленно, мы видим, что числа, стоящие на одной вертикали, вместе составляют (*n+1)*, и так как вертикалей всего имеется *n*, то отсюда следует, что $2S_n = n(n+1)$, и остается еще разделить на 2.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (18)$$

Из формулы (18) сразу же вытекает общая формула для суммы *(n+1)* первых членов любой арифметической прогрессии:

$$P_n = a+(a+d)+(a+2d)+...+(a+nd) = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}.$$

В самом деле,

$P_n = (n+1)a + (1+2+3+...+n)d = (n+1)a + \frac{n(n+1)d}{2} = \frac{2(n+1)a + n(n+1)d}{2} = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$ В случае, когда $a=0,\ d=1$, последнее соотношение превращается в соотношение (18).

2 подход. Вычислим сумму *(n+1)* первых членов любой *арифметической прогрессии* общего вида $P_n = \sum_{0\le k\le n}(a+dk)$ (19) применяя законы преобразования конечных сумм.

Согласно переместительному закону, заменив k на *(n-k)*, получим

$$P_n = \sum_{0\le n-k\le n}(a+d(n-k)) = \sum_{0\le k\le n}(a+dn-dk) \quad (20)$$

Равенства (19) и (20) почленно сложим, используя сочетательный закон, имеем $2P_n = \sum_{0\le k\le n}(a+dk) + \sum_{0\le k\le n}(a+dn-dk) = \sum_{0\le k\le n}(a+dk+a+dn-dk) = \sum_{0\le k\le n}(2a+dn)$.

А теперь применим распределительный закон и вычислим тривиальную сумму $2P_n = (2a+dn)\sum_{0\le k\le n}1 = (2a+dn)(n+1)$.

Отсюда получаем формулу для суммы *(n+1)* первых членов любой *арифметической прогрессии*

$$P_n = \frac{(2a+dn)(n+1)}{2} = \frac{a+(a+dn)}{2}(n+1).$$

2 метод. Метод приведения

Суть этого метода заключается в том, чтобы начать с подлежащей вычислению суммы и обозначить ее $S_n = \sum_{0\le k\le n} a_k$. Затем мы переписываем S_{n+1} двумя способами, выделяя как последний, так и первый члены:

$$S_n + a_{n+1} = \sum_{0\le k\le n+1} a_k = a_0 + \sum_{1\le k\le n+1} a_k = a_0 + \sum_{1\le k+1\le n+1} a_{k+1} = a_0 + \sum_{0\le k\le n} a_{k+1} \quad (21)$$

Теперь можно заняться последней суммой и попытаться выразить ее через S_n. Если попытка окажется удачной, то мы получим уравнение, решением которого и будет искомая сумма.

Воспользуемся, к примеру, этим подходом для нахождения суммы *(n+1)* первых членов любой *геометрической прогрессии* общего вида

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} bq^k \quad (22)$$

В соответствии с общей схемой приведения (21) сумма S_{n+1} переписывается в виде $S_n + bq^{n+1} = bq^0 + \sum_{0\le k\le n} bq^{k+1}$, а сумма в правой части по распределительному закону равна $q\sum_{0\le k\le n} bq^k = qS_n$.

Таким образом, $S_n + bq^{n+1} = b + qS_n$, и, разрешая это уравнение относительно S_n, получаем известную нам со школы формулу

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} bq^k = \frac{b(1-q^{n+1})}{1-q}, q \ne 1.$$

3 метод. Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода сводится к тому, чтобы сумму $S_n = \sum_{1\le k\le n} a_k$ свести к сигма-рекуррентному соотношению: $S_1 = a$, $S_n = S_{n-1} + P_k(n), n = 2,3,...,$ где $P_k(n) = p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + ... + p_k n^k$ - многочлен степени *k* относительно *n*. Тогда можно искать сумму S_n методом неопределенных коэффициентов в виде $S_n = Q_{k+1}(n)$,
где $Q_{k+1}(n) = q_0 + q_1 n + q_2 n^2 + ... + q_k n^k + q_{k+1} n^{k+1}$ - многочлен степени *(k+1)* – на единицу большей, чем степень многочлена $P_k(n)$.

Например, найдем методом неопределенных коэффициентов сумму квадратов первых *n* натуральных чисел

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{1\le k\le n} k^2, n \in \mathrm{N}$$

$$S_1 = 1, S_n = S_{n-1} + n^2, n = 2,3,... \quad (23)$$

Ищем S_n в виде $S_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3$.

Тогда из соотношения (23) получим

$\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 = \alpha + \beta(n-1) + \gamma(n-1)^2 + \delta(n-1)^3 + n^2$, откуда

$$\begin{cases} \alpha = \alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ \beta = \beta - 2\gamma + 3\delta, \\ \gamma = \gamma - 3\delta + 1, \\ \delta = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{1}{3}, \\ \gamma = \frac{3}{2}\delta = \frac{1}{2}, \\ \beta = \gamma - \delta = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Итак, $S_n = \alpha + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3, n = 2,3,...$.

При *n=1* получим $1 = S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, поэтому $\alpha = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$.

Окончательно $S_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n+3n^2+2n^3}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathrm{N}$.

4 метод. Метод усложнения и упрощения

Метод усложнения и упрощения заключается в замене исходной суммы более сложной на первый взгляд двойной суммой (в общем случае, кратной суммой), которая в действительности может быть упрощена, если преобразовать ее как надо:

$$S_n = \sum_{1\le k\le n} k2^k = \sum_{1\le j\le n} \sum_{j\le k\le n} 2^k = \sum_{1\le j\le n} \sum_{j\le k+j\le n} 2^{k+j} = \sum_{1\le j\le n} \sum_{0\le k\le n-j} (2^k \cdot 2^j) = \sum_{1\le j\le n} (2^j \sum_{0\le k\le n-j} 2^k) = \sum_{1\le j\le n} 2^j (2^{n-j+1} - 1)$$

$$= \sum_{1\le j\le n} (2^{n+1} - 2^j) = \sum_{1\le j\le n} 2^{n+1} - \sum_{1\le j\le n} 2^j = (2^{n+1} \sum_{1\le j\le n} 1) - \frac{2-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} \cdot n + 2 - 2^{n+1} = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

5 метод. Метод интегральной оценки

Интегральная оценка, для суммы $S_n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{0\le k\le n} k^2, n \in \mathrm{N}$ следующая $\int_0^n x^2 dx = \frac{n^3}{3}$.

Рассмотрим погрешность полученной оценки: $E_n = S_n - \frac{n^3}{3}$. Так как, сумма S_n удовлетворяет сигма-рекуррентному соотношению $S_n = S_{n-1} + n^2$, то погрешность E_n удовлетворяет следующему сигма-рекуррентному соотношению

$$E_n = S_n - \frac{n^3}{3} = S_{n-1} + n^2 - \frac{n^3}{3} = E_{n-1} + \frac{(n-1)^3}{3} + n^2 - \frac{n^3}{3} = E_{n-1} + n - \frac{1}{3}, E_0 = S_0 - \frac{0^3}{3} = 0.$$

Это соотношение сводится к сумме

$$E_n = E_0 + \sum_{k=1}^{n} (k - \frac{1}{3}) = \sum_{k=1}^{n} k - \frac{n}{3} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n(3n+1)}{6}.$$

Прибавив найденную погрешность E_n к оценке , мы получим искомую сумму $S_n = E_n + \frac{n^3}{3} = \frac{n(3n+1)}{6} + \frac{n^3}{3} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.

6 метод. Формула суммирования Эйлера-Маклорена

При составлении компьютерных программ весьма важно знать, насколько эффективно будет работать тот или иной алгоритм.

Можно предположить, что на вводе в компьютер данная конкретная задача имеет размер n. Например, этим числом может оцениваться объём памяти, задействованной под программу. Время работы программы, очевидно, будет зависеть от n, то есть получается функция $t(n)$, оценивающая сложность программы. Если эта функция является многочленом (полиномом), то соответствующий алгоритм называется *полиномиальным*. В настоящее время принято считать, что на практике такие алгоритмы являются наиболее эффективными.

С другой стороны, известны алгоритмы, сложность которых для задач достаточно большого объёма превосходит любую полиномиальную оценку. Обычно эти алгоритмы называют *экспоненциальными*. Например, алгоритмы, сложность которых оценивается функциями k^n (k>1), n!, 2^{n^3}, n^n и тому подобными.

Из таблицы 3 становится ясным различие между полиномиальными и экспоненциальными алгоритмами. Предполагается, что компьютер выполняет 10^7 операций в секунду, а приблизительные времена вычислений обоих алгоритмов сравнимы для различных размеров проблемы.

Таблица 3. Время выполнения алгоритмов

Сложность алгоритма	Размер проблемы		
	n = 10	n = 40	n = 70
n^2	0,00001 сек.	0,00016 сек.	0,00049 сек.
2^n	0,0001 сек.	30,5 час.	37436 веков

Очевидно, что в последнем случае бессильными оказываются и самые современные компьютеры. Поэтому весьма важно знать оценку таких комбинаторных чисел, которые встречаются наиболее часто. Первым шагом к решению этой проблемы явились исследования швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707-1783).

Л. Эйлер рассматривал задачу об отыскании или оценке суммы вида

$f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n)$

для некоторой непрерывной функции $f(x)$. Он получил следующую формулу:

$f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n) \sim \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}[f(0)+f(n)] + \int_0^n (x-[x]-0{,}5)\,f'(x)dx$, где $[x]$ – целая часть числа x. Этот метод является общим методом аппроксимации сумм, который был впервые опубликован Л.Эйлером в 1738 г. и, независимо от него, в 1742 г. К. Маклореном.

Общая формула суммирования Эйлера-Маклоренна выглядит так:

$$\sum_{a\le k<b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m, \text{ где } R_m = (-1)^{m+1}\int_a^b \frac{B_n(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)dx \qquad (24)$$

Выражение в правой части зачастую оказывается превосходной аппроксимацией суммы в левой части, в том смысле, что остаток R_m очень мал. Формула (24) сводит вместе следующие понятия: a и b – произвольные целые числа, $a \le b$; m – произвольное натуральное число; $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, обладающая на интервале (a,b) производными до m-го порядка включительно; числа B_k - числа Бернулли;

функция $B_m(\{x\})$ - многочлен Бернулли. Вывод этой формулы в нескольких эквивалентных формулировках приводится в [50].

Пример. Для вычисления знакомой нам уже суммы $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{1 \le k \le n} k^2, n \in \mathrm{N}$ с помощью формулы Эйлера-Маклорена, необходимо рассмотреть следующую степенную функцию $f(x) = x^{m-1}$, тогда $f^{(m)}(x) = 0 \Rightarrow R_m = 0$ и формула (24) сведется к следующей:

$$\sum_{a \le k < b} k^{m-1} = \left.\frac{x^m}{m}\right|_a^b + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{(m-1)!}{(m-k)!} x^{m-k} \Big|_a^b = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} B_k (b^{m-k} - a^{m-k})$$

Так, для *m=3* получим

$$\sum_{1 \le k < n} k^2 = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{3} \frac{3!}{k!(3-k)!} B_k (n^{3-k} - 1^{3-k}) = \frac{1}{3}(B_0(n^3 - 1) + 3B_1(n^2 - 1) + 3B_2(n-1) + B_3(n^0 - 1)) =$$
$$= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}n - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{1 \le k < n} k^2 + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$