Линейная алгебра

Будем считать, что читатель свободно владеет арифметическими операциями с матрицами и определителями, умеет перемножать векторы разными способами и хорошо знаком с кривыми и поверхностями первого и высших порядков. Поэтому не будем останавливаться на известных положениях программ технических вузов и лишь обратим внимание на особенности, которые, как правило, не освещаются на лекциях из-за недостатка времени, но часто предлагаются на олимпиадах. Также мы сохранили и общепринятые обозначения.

1. Со степенью матрицы связаны следующие определения, характеризующие ее свойства. Квадратная матрица A называется *идемпотентной*, если $A^2 = A$; *инволютивной*, если $A^2 = E$ (единичная матрица того же размера); *периодической,* если $A^k = E$ (число k – период матрицы); *нильпотентной,* если $A^k = \theta$ (θ – нулевая матрица того же размера, число k – показатель нильпотентности матрицы A).

Пример

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$ – идемпотентная, так как

$$A^2 = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix} = A.$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$ – инволютивная и периодическая, так как

$$B^2 = \begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – нильпотентная (с показателем 3), так как

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta .$$

2. Со следом квадратной матрицы – суммой ее главных диагональных элементов – $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ связаны следующие свойства.

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.
2. $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^T$.
3. $\operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(B^T A) = \operatorname{tr}(AB^T) = \operatorname{tr}(BA^T)$.
4. $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB)$.
5. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr}(AB^T)$.
6. Если x и y – столбцы размерами $n \times 1$, то

$$\operatorname{tr}(Axx^T) = x^T A x \text{ и } \operatorname{tr}(xy^T) = x^T A x .$$

7. Если λ_i – корни характеристического уравнения $\det\left(A-\lambda E\right)=0$, то $\operatorname{tr} A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

3. При решении многих задач с матрицами удобно переходить к блочным матрицам, т.е. к матрицам, разделенным горизонтальными линиями на блоки (клетки). Это иногда позволяет избежать громоздких вычислений. Поясним на примере.

Пример

Найдём произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&2&1&0\\3&4&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&5&6\\0&0&7&8\end{pmatrix}.$$

Разобьём матрицы на блоки:

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}E&\theta\\\hline D&E\end{array}\right),\ B=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&1&0&1\\\hline 0&0&5&6\\0&0&7&8\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}E&E\\\hline \theta&F\end{array}\right).$$

Операции с блочными матрицами аналогичны операциям с обычными матрицами. Перемножая, получаем

$$AB=\left(\begin{array}{c|c}E&\theta\\\hline D&E\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}E&E\\\hline \theta&F\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}E&E\\\hline D&D+F\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&2&6&8\\3&4&10&12\end{pmatrix}.$$

4. При вычислении определителей иногда полезно использовать, кроме традиционных, следующие приёмы:

1) рассмотреть определитель как полином от некоторой переменной и найти его корни. Тогда определитель есть

произведение линейных множителей коэффициента при старшей степени полинома, который обычно легко найти;

2) можно попробовать выразить определитель порядка n через определители низших порядков. Если рекуррентное соотношение имеет вид

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \ n > 2,$$

то определитель находится в виде

$$D_n = C_1 a^n + C_2 b^n,$$

где a и b – корни уравнения $x^2 - px - q = 0$, а коэффициенты C_1 и C_2 вычисляются непосредственно подставлением в формулу значения D_1 и D_2. Если $a = b$, то $D_n = a^n\left(\left(n-1\right)C_1 + C_2\right)$;

3) если ко всем элементам определителя прибавить одно и то же число, то он увеличится на произведение этого числа на сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя. Это свойство неплохо использовать для получения «хорошего» определителя;

4) использовать свойство

$$\det\left(AB\right) = \det A \det B.$$

Тогда можно представить искомый определитель в виде произведения двух определителей;

5) дифференцирование определителя удобно проводить по формуле

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{k1}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{k1}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix};$$

6) объём n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ в ортонормированном базисе, равен определителю

$$V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i1} & \dots & a_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если n-мерный параллелепипед построен на векторах $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, то его объем равен

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \dots & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \dots & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) & \dots & (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \end{vmatrix}.$$

Задачи

1.1. Пусть A – матрица $n \times n$ такая, что $A^2 = A$, E – единичная $n \times n$ матрица. Доказать, что определитель матрицы $E - A$ равен 0 или 1.

Решение

Первый способ

Обозначим рассматриваемую матрицу $B = E - A$. Возводя в квадрат матрицу B и используя равенство $A^2 = A$ из условия задачи, получаем:

$B^2 = (E - A)^2 = E - 2A + A^2 = E - 2A + A = E - A = B$. Если $B^2 = B$, то определитель матрицы B равен определителю матрицы B^2, то есть $(\det B)^2 = \det B$.

Это возможно лишь в том случае, если $\det B = \det(E - A) = 0$ или $\det B = \det(E - A) = 1$. Что и требовалось доказать.

Второй способ

По условию $A^2 = A$. Пусть $Y = E - A$, $x = \det Y$. Тогда $Y^2 = (E - A)(E - A) = EE - EA - AE + (-A)(-A) = E - 2A + A^2 =$ $= E - 2A + A = E - A = Y.$ Тогда, поскольку определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц, то $\det Y^2 = \det Y \cdot \det Y = \det Y$, то есть $x^2 = x$. Отсюда $x = 0$ или $x = 1$.

1.2. Матрицы A и B таковы, что $\dim A = 4 \times 2$, $\dim B = 2 \times 4$ и

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти BA.

Решение

Представим матрицы A и B в виде блочных матриц A_1, A_2, B_1, B_2:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \qquad B = \left(B_1 \mid B_2 \right).$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix} \left(B_1 \mid B_2 \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ \hline A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{array} \right).$$

Откуда следует, что $A_1B_1 = A_2B_2 = E_2$ и $A_1B_2 = A_2B_1 = -E_2$. Следовательно, $A_1 = \left(B_1\right)^{-1}$, $B_2 = -\left(A_1\right)^{-1}$, $A_2 = \left(B_2\right)^{-1} = -A_1$.

Окончательно:

$$BA = \left(B_1 \mid B_2\right)\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = A_1B_1 + A_2B_2 = 2E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3. Матрицы A и B таковы, что $AB + A + B = \theta$. Доказать, что $AB = BA$.

Решение

Матрицы $A+E$ и $B+E$ перестановочны, так как

$$\left(A+E\right)\left(B+E\right) = AB + A + B + E = E,$$

следовательно,

$$\left(A+E\right)\left(B+E\right) = \left(B+E\right)\left(A+E\right) = BA + A + B + E = E,$$

Откуда следует, что $AB = BA$.

1.4. Найти ранг матрицы $A = \left\|a\right\|$ размером $n \times n$ $\left(n \geq 3\right)$, где $a = i + j - 2ij$.

Решение

Первый способ

Заметим, что

$$a_{1j} = 1 + j - 2j = 1 - j,\ a_{2j} = 2 + j - 4j = 2 - 3j,$$
$$a_{3j} = 3 + j - 6j = 3 - 5j = -(1-j) + 2(2-3j) = -a_{1j} + 2a_{2j}.$$

Покажем, что

$a_{i+2,j} = -a_{ij} + 2a_{i+1,j}$; $a_{i+1,j} = i+1+j-2(i+1)j = i+1-j-2ij$,
$a_{i+2,j} = i+2+j-2(i+2)j = i+2-4j-2ij = -(i+j-2ij)+$
$+2(i+1-i-2ij) = -a_{i,j} + 2a_{i+1,j}$.

Таким образом, каждая строка, начиная с третьей, является линейной комбинацией двух предыдущих, следовательно, и первых двух. Так как первые две строки линейно независимы, то ранг равен 2.

Второй способ

$a_{ij} = i+j-2ij$, $a_{i,j+1} = i+j+1-2i(j+1) = a_{ij}+1-2i$. Так как $(1-2i)$ не зависит от j, это означает, что в каждой строке матрицы стоит арифметическая прогрессия.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется. После вычитания из $j+1$-го столбца j-го столбца, при $j = n-1, n-2, ..., 1$, все столбцы, начиная со второго, становятся одинаковыми. Тогда при повторе этой процедуры еще раз все столбцы, начиная с 3-го, обнуляются. Отсюда ранг матрицы не больше 2 .

Ответ: 2 .

1.5. Может ли при элементарных преобразованиях матрицы A измениться ранг матрицы A^2?

Решение

Первый способ

Матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями приводится к матрице $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. При этом $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг изменился.

Второй способ

Если ранг может измениться, то нужно указать матрицу A. Естественно искать матрицу A среди наиболее простых квадратных матриц с положительным рангом. Поэтому ищем в качестве матрицы A квадратную матрицу второго порядка ранга 1.

Потребуем, чтобы $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $r(A^2) = 0$. Пусть после некоторого элементарного преобразования матрицы A получилась матрица A'. Тогда $r\left(A'\right) = r(A) = 1$, так как при элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется. Потребуем, чтобы $r\left(\left(A'\right)^2\right) > 0$.

Для этого достаточно потребовать, чтобы $\left(A'\right)^2 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Если взять матрицу A, состоящую из одной единицы и трех нулей, то ее ранг равен 1.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Не подходит.

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Подошло.

Элементарные преобразования матрицы – например прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (другого столбца), умноженной (умноженного) на число.

Прибавим к первому столбцу матрицы A второй столбец. Получится матрица $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Нулей стало меньше, поэтому вряд ли $\left(A'\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Действительно, $\left(A'\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A' \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$r\left(\left(A'\right)^2\right) = 1 > 0$. Ранг матрицы A^2 изменился (увеличился на единицу).

Ответ: да, может.

1.6. Существует ли ненулевая матрица A размером $n \times n$ с действительными компонентами такая, что для любой $n \times n$-матрицы X матрица $E - XA$ невырожденная? (Здесь E – единичная $n \times n$-матрица.)

Решение

Первый способ

Рассмотрим матрицу как линейный оператор. Так как $A \neq 0$, то существует такой вектор u, что справедливо равенство $Au = v, v \neq 0$. Ясно, что $u \neq 0$. Возьмем какой-либо линейный оператор B, который переводит вектор v в вектор u: $Bv = u$. Тогда справедливо равенство $BAu = v$. Отсюда следует, что $(E - BA)u = 0$. Значит, матрица $E - BA$ - вырожденная.

Второй способ

Пусть $\det A \neq 0, E - XA$ – невырожденная матрица при любой X, то есть ее определитель не равен нулю. Тогда если X – невырожденная, то при $X = A^{-1}$ матрица $E - XA = E - E = 0$ – вырожденная. Следовательно, A – вырожденная матрица. Пусть X – невырожденная матрица. Тогда существует X^{-1}.

Тогда $E - XA = X(X^{-1} - A)$. Для получения противоречия достаточно так подобрать невырожденную матрицу X^{-1}, чтобы матрица (содержимое скобок) $B = X^{-1} - A$ оказалась вырожденной. Для этого достаточно найти такую вырожденную матрицу B, чтобы матрица $Y = A + B$ оказалась невырожденной. Докажем, что это можно сделать.

Пусть $r(A) = r, r < n$. Рассмотрим вырожденную диагональную матрицу A_1 с r единицами на главной диагонали $(r(A_1) = r)$ и вырожденную диагональную матрицу B_1 ранга $n - r$ с $n - r$ единицами там, где стоят нули у матрицы A_1. Тогда $E = A_1 + B_1$ – невырожденная матрица и существуют невырожденные матрицы S, T такие, что $A = SA_1T$. Тогда $A_1 = S^{-1}AT^{-1}$, $S^{-1}AT^{-1} + B_1 = E$, $S^{-1}A + B_1T = T$, $A + SB_1T = ST$.

Положим $X^{-1} = ST$.

Получим $E - XA = X(ST - A) = X(SB_1T)$ – вырожденная матрица, так как матрица B_1 – вырожденная. Противоречие.

Ответ: такой матрицы A не существует.

1.7. Квадратные матрицы A и B таковы, что $AB = 0$. Что можно сказать о собственных значениях матрицы $E + BA$ (E – единичная матрица)?

Решение

Первый способ

Докажем, что все собственные числа матрицы $E + BA$ равны 1. Пусть x – собственный вектор, соответствующее собственное значение обозначим через λ. Тогда $(E + BA)x = \lambda x$. Отсюда $x + BAx = \lambda x$, $(\lambda - 1)x = BAx$. Пусть $\lambda \neq 1$.

Тогда $x = \frac{1}{\lambda - 1} BAx$. Умножим слева на A, воспользуемся тем, что $AB = 0$, и получим: $Ax = \frac{1}{\lambda - 1} ABAx = 0$.

Так как $Ax = 0$, то $BAx = 0$, а значит, $(\lambda - 1)x = 0$. Но x – собственный вектор, поэтому он не равен нулю. Отсюда получаем, что $\lambda = 1$, а это противоречит предположению.

Второй способ

$AB = 0$. $\left|E + BA - \lambda E\right| = 0$. λ - ?

$\left|BA - (\lambda - 1)E\right| = 0$. $\left|BA\right| = \left|B\right| \cdot \left|A\right| = 0$. Поэтому $\lambda = 1$ является одним из собственных значений матрицы $E + BA$.

Пусть $\lambda - 1 = \lambda_1$. $(BA)^2 = BABA = B(AB)A = 0$. Поэтому, если $\left|(BA)^2 - (\lambda_1 E)^2\right| = 0$, то $\left|-\lambda_1^2 E\right| = 0$, $\left(-\lambda_1^2\right)^n = 0$, $\lambda_1 = 0$.

Тогда

$$\left|(BA)^2 - (\lambda_1 E)^2\right| = \left|(BA - \lambda_1 E)(BA + \lambda_1 E)\right| = \left|BA - \lambda_1 E\right| \cdot \left|BA + \lambda_1 E\right|.$$

Значит, если

$\left|BA - \lambda_1 E\right| = 0$, то $\left|(BA)^2 - (\lambda_1 E)^2\right| = 0$, $\lambda_1 = \lambda - 1 = 0$, $\lambda = 1$.

Ответ: все собственные числа матрицы равны 1.

1.8. Пусть матрица A равна: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m$, где m - натуральное число. При каком значении m сумма всех элементов первой строки этой матрицы будет максимальной?

Решение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m(17-m) \\ 0 & 1 & -2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем равенство, используя принцип математической индукции:

1) для $m = 1$ равенство выполняется;

2) пусть равенство выполнено для некоторого натурального m.

Рассмотрим его справедливость для $m+1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m(17-m) \\ 0 & 1 & -2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2m+2 & 2m(17-m)+32-4m \\ 0 & 1 & -2m-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(m+1) & 2(m+1)(17-(m+1)) \\ 0 & 1 & -2(m+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумма элементов первой строки $s = 1 + 2m + 2m(17-m) = 1 + 36m - 2m^2$. Максимумом функции s является $(9,163)$.

1.9. Матрицы A и B размерностей соответственно 3×2 и 2×3 таковы, что $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу BA.

Решение

Пусть $A' - 2\times 3$ – матрица такая, что $A'A = E$, и $B' - 3\times 2$ – матрица такая, что $BB' = E$, где E – единичная 2×2 – матрица. Далее нетрудно проверить, что $\left(AB\right)\left(AB\right) = 9(AB)$. Тогда $BA = (A'A)(BA)(BB') = A'(AB)(AB)B' = 9(A'A)(BB') = 9E$.

1.10. Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Разрешается любую строку (столбец) поэлементно умножить или разделить на другую строку (соответственно столбец). Можно ли за несколько таких операций получить матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) можно, например, следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 & 4 \\ 3/4 & 4/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

б) нельзя. Представим все числа в матрице как степени числа 2. Тогда указанные операции сводятся к сложению или вычитанию соответствующих показателей. Составим матрицу из показателей чисел: $\begin{pmatrix} 1 & \log_2 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы при заданных операциях не меняется. Но он не равен 0 и противоположен определителю из показателей матрицы, заданной в пункте «б».

1.11. Вычислить $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Решение

Приведем определитель к виду:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

прибавив к 1-й строке все строки

$$=(n-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

1.12. Вычислить $\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

Решение

Вычтем из каждого элемента определителя x. Тогда определитель станет диагональным, а его величина увеличится на сумму алгебраических дополнений диагонального определителя, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}+x\{(a_2-x)(a_3-x)\dots(a_n-x)+$$

$$+(a_1-x)(a_3-x)\dots(a_n-x)+\dots+(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_{n-1}-x)\}.$$

Окончательно,

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots\frac{1}{a_n-x}\right\}.$$

1.13. Вычислить определители, используя их свойства:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos(\alpha+\delta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin\beta & \cos(\beta+\delta) & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos(\gamma+\delta) & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 \\ \gamma & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 \end{vmatrix}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$;

3) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}$, где α и β – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$;

5) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, где α, β, γ – корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Решение

1. Разложить определитель на сумму, используя формулы синуса и косинуса суммы аргументов.

Ответ: 0.

2. Сначала вычесть 1-ю строку из остальных строк и вынести общие множители за знак определителя.

Ответ: $4(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)$.

3. Прибавить к 1-му столбцу 3-й, а затем «сделать» нули в нем.

Ответ: $sin(\alpha-\beta)sin(\gamma-\beta)sin(\gamma-\alpha)$.

4. См. указания к п.5.

Ответ: $1-p^3+3pq-3q$.

5. К элементам 1-й строки (столбца) прибавить элементы остальных строй (столбцов) и применить формулы Виета. Для

приведенного кубического уравнения они имеют вид: $x_1+x_2+x_3=-p$; $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=q$; $x_1x_2x_3=-r$.

Ответ: $p(p^2-3q)$.

1.14. Доказать, что:

1) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$;

2) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1+x & -x & x \\ x & 1-x & x \\ -x & x & 1+x \end{vmatrix} > 0$, $\forall x \in R$;

3) $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ -x & 2x & 3x^2 \end{vmatrix} > 0$, $\forall x \in R$;

4) при каких $a,b,c>0$ имеет место знак равенства в определителе $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \le 0$.

Решение

1. Разложить определитель слева на сумму.

2. 2-й столбец прибавить к остальным столбцам.

Ответ: $\Delta(x)=2x^2+x+1>0$, $\forall x\in R$.

3. Вынести x за знак определителя 2-го и 3-го столбцов и найти $\max\Delta(x)$.

Ответ: $\Delta(x)=-x^2(x^2-1)^2\le 0$, при $x=0$ и $x=\pm 1$.

4. Использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех

неотрицательных чисел $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$, учитывая, что равенство имеет место только при $x=y=z$.

Ответ: $\Delta=3abc-a^3-b^2-c^3\leq 0$, $\Delta=0$ при $a=b=c$.

1.15. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix}<0$.

Решение

Вынести x из 3-го столбца за знак определителя.

Ответ: $x\in(-\infty;0,5)\cup(0;1)$.

1.16. Доказать, что для всех допустимых значений x справедливы неравенства:

1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2x-1 & x & x-1 \\ 3x & 2+x & x \end{vmatrix}^{1/2}\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}^{1/2}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

При каких x выполняется знак равенства?

Решение

Убедиться, что определитель $\Delta(x)$ – многочлен 4-й степени, его корни легко подобрать так, чтобы 2 строки из четырех стали равными. Для определителя коэффициента при x^4 вычислить значение $\Delta(0)$.

Ответ: $\Delta(x) = -(x^2-1)(x^2-4) \geq 0$, если $1 \leq |x| \leq 2$, $\Delta(x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ при $x = \pm\sqrt{2,5}$.

1.17. Построить графики функций:

1) $y = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$, $(a \neq b)$;

2) $y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+x & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение

1. Вычесть вторую строку из остальных строк; при построении графика рассмотреть случаи $a < b$ и $a > b$.

Ответ: парабола $y = (b-a)(x-a)(x-b)$.

2. Вычесть из 2-й и 3-й строк 1-ю.

Ответ: парабола $y = 4x(x+1)$.

1.18. Найти наибольшее и наименьшее значения определителя $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$, где a, b, c – косинусы углов некоторого вектора с осями координат.

Решение

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Имеем $\Delta = 2abc + 1 - a^2 - b^2 - c^2 = 2abc$, т.к. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Из неравенства

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \quad \Rightarrow \quad (abc)^2 \leq \frac{1}{27}. \qquad (1)$$

Тогда $|\Delta| = 2|abc| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$, т.е. $\Delta = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\min \Delta = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Знак равенства в (1) имеет место только при $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{27}$. Поэтому $\max \Delta$ достигается, когда все косинусы положительны, или два из трех косинусов отрицательны; $\min \Delta$ достигается, когда один из косинусов отрицателен, а два других имеют одинаковые знаки.

1.19. Решить уравнения:

1) $$\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ a^6 & a^4 & a^2 & 1 \\ a^9 & a^6 & a^3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = 0;$$

3) $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix} = 0\ ;$$

4) $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & x^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & x^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n-1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0\ ;$$

5) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1-x \end{vmatrix} = 0$$

(все a_k, $k=\overline{1,n-1}$ различны);

6) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_{n-x} \end{vmatrix} = 0\,;$$

7) $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = 0\,.$$

Решение

1. См. указание к задаче **1.16**

Ответ: $x_1 = a$, $x_2 = a^2$, $x_3 = a^3$.

2)-7) Определить степени многочленов и применить указание к задаче **1.16**.

2. Обозначим $\Delta(x)$ определитель слева. Очевидно, что $\Delta(1)=0$, так как получаем две одинаковые строчки; аналогично находим другие корни уравнения $x_2=2,...,x_{n-1}=n-1$. Так как $\Delta(x)$ – многочлен $n-1$ степени (хотя сам определитель n-го порядка), а такой многочлен не может иметь более $n-1$ различных корней, то окончательно получаем: $x_k=a_k$, все корни уравнения;

3. $\Delta_{n+1}(x)$, $k=\overline{1,n-1}$ – многочлен $(n+1)$ степени; причем $\Delta_{n+1}(a_k)=0$, $k=\overline{1,n}$, т.е. $x_k=a_k$, $k=\overline{1,n}$– n корней многочлена. Для нахождения последнего $(n+1)$-го корня, x_{n+1} прибавим к 1-му столбцу определителя остальные столбцы, все элементы получившегося столбца будут одинаковы и равны $x+\sum_{k=1}^{n}a_k$, вынося этот общий множитель за знак определителя, получаем, что $x_{n+1}=-\sum_{k=1}^{n}a_k$.

4. $x_k=a_k$, $k=\overline{1,n-1}$.

5. $x_k=k-1$, $k=\overline{1,n-1}$.

6. $x_k=a_k$, $k=\overline{1,n-1}$.

7. $x=x_k$, $k=\overline{1,n}$.

1.20. Вычислить определители n-го порядка Δ_n, элементы a_{ik}, i, $k=\overline{1,n}$, которых имеют вид:

1) $a_{ik}=1+x_iy_k$; 2) $a_{ik}=\min(i,k)$; 3) $a_{n,k}=\max(i,k)$.

Решение

1. Вычесть 1-й столбец из остальных столбцов.

Ответ: $\Delta_1 = 1 + x + x + y + 1$, $\Delta_2 = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)$, $\Delta_n = 0$ при $n > 2$.

2. Доказать рекуррентную формулу $\Delta_n = \Delta_{n-1}$, $n \geq 2$.

Ответ: определитель Δ_n с элементами $a_{ik} = \min(i,k)$, i, $k = \overline{1,n}$ имеет вид: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & n \end{vmatrix}$.

Вычитая 1-й столбец из остальных столбцов, получаем, что

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Получили, что $\Delta_n = \Delta_{n-1}$, где Δ_{n-1} – определитель такого же вида, как и Δ_n, но $(n-1)$–го порядка. Из полученной рекуррентной формулы находим $\Delta_n = \Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} = \dots = \Delta_1 = 1$.

Замечание.

Матрицу из элементов Δ_n можно представить в виде произведения $A = A_1 A_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $|A|=|A_1||A_2|$, причем $|A|=\Delta_n$; $|A_2|=|A_1|=1$, то $\Delta_n=1$; $\Delta_n=n$.

3. После упрощения получившийся определитель разложить по элементам n-й строки. В пп.2, 3 матрицу A из элементов определителя можно также представить в виде произведения двух матриц верхней и нижней треугольной, у которых по одну сторону от главной или побочной диагонали все элементы – нули, а по другую – единицы, и применить свойство $|AB|=|A||B|$.

Ответ: $\Delta_n=n$.

1.21. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

3) $\Delta_n=\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & 0 & a & .. & a \\ a & a & 0 & .. & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

4) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix};$$

5) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1/n \end{vmatrix};$$

6) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1/q & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/q^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & .. & 1/q^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Решение

1. См. указание к п.3.

Ответ: $\Delta_{n+1} = b_1 b_2 ... b_n$.

2. Разложив Δ_n по элементам 1-й строки, получить рекуррентную формулу: $\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$, $n \geq 3$; вычислить Δ_2, Δ_3 и попытаться предугадать формулу для вычисления Δ_{n-1}, а затем применить метод полной математической индукции, учитывая, что $\Delta_1 = \alpha+\beta$ можно записать в виде: $\Delta_1 = (\alpha^2 - \beta^2)/(\alpha-\beta)$, $(\alpha \neq \beta)$.

Ответ: $\Delta_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$.

3. Вычесть 1-ю строку из остальных строк.

Ответ: $\Delta_n = (-1)^{n-1} d^n$.

4. См. указание к п.2.

Ответ: согласно указанию имеем $\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$, $n \geq 3$. Найдем $\Delta_1 = \alpha+\beta$; $\Delta_2 = (\alpha-\beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ и перепишем их в виде: $\Delta_1 = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta)$; $\Delta_2 = (\alpha^3-\beta^3)/(\alpha-\beta)$. Допустим, что $\Delta_{n-2} = (\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})/(\alpha-\beta)$.Тогда

$$\Delta_n = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha-\beta)} - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{(\alpha-\beta)} = \frac{(\alpha^{n-1}-\alpha\beta^n+\beta\alpha^n-\beta^{n+1}-\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)}{(\alpha-\beta)} =$$

$= \dfrac{(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{(\alpha-\beta)}$. Отметим, что приведенный прием доказательства формулы для Δ_n и составляет содержание метода математической индукции.

5. См. указание к п.6.

Ответ: $\Delta_{n+1} = -(n+1)n/2\times 1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1}{n} = -\dfrac{(n+1)}{2(n-1)!}$.

6. Вычесть из 1-го столбца остальные, умножая их соответственно: в п.5 на $1,2,\ldots,n$, а в п.6 на $1,q,\ldots,q^{n-1}$.

Ответ: $\Delta_{n+1} = -(1+q+q^2+\ldots+q^n\times\ldots\times 1\cdot\dfrac{1}{q}\cdot\dfrac{1}{q^{-1}} = -\dfrac{(1-q^n)}{(1-q)q^{n(n-1)/2}}$.

1.22. Вычислить:

1) определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$, умножая его на

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

2) квадрат Δ_1 из п.1;

3) квадрат Δ_2, где $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$.

Решение

Правило умножения определителей приведено в указании к задачам, при этом нужно использовать, что определители данной и транспонированной матрицы равны $|A| = |A^T|$.

Ответ:

1) $\Delta = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$;

2) $\Delta_1^2 = 256$;

3) $\Delta_2^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \Rightarrow \Delta_2 = \pm\sqrt{\Delta^2}$; но слагаемое a^4 входит в Δ_2 со знаком «плюс» как произведение элементов, стоящих на главной диагонали, поэтому $\Delta_2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

1.23. Пусть A – вещественная матрица размером $n \times n$, A^T – транспонированная к ней. Доказать, что если $AA^T = 0$, то $A = 0$ (0 – нуль-матрица).

Решение

Рассматривать элементы AA^T, стоящие на главной диагонали.

1.24. Матрица A с элементами $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, называется антисимметрической, если $a_{ij} = -a_{ij}$. Доказать, что определитель $|A|$ такой матрицы нечетного порядка равен 0.

Решение

Вывести из условия, что $A^T = -A$, $|A^T| = |A| = -|A|$.

1.25. Пусть A – квадратная матрица нечетного порядка, A^T – транспонированная к ней. Доказать, что $|A - A^T| = 0$.

Решение

Убедиться, что матрица $A - A^T$ – антисимметрическая.

1.26. Доказать, что если A – матрица размером $n \times n$, $A^2 = A$, то матрица $B = 2A - E$ (E – единичная) удовлетворяет условию $B^2 = E$. Найти $|A|$ и $|B|$.

Решение

Использовать правило умножения определителей.

Ответ: $|A| = 0$ или $|A| = 1$; $|B| = \pm 1$.

1.27. Вычислить:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1999}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$;

3) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{n}$, $n \in N$.

Решение

1. Убедиться, что $A^2 = -E$, где E – единичная матрица размером 2×2.

Ответ: согласно указанию

$$A^{1999} = A(A^2)^{999} = A(-E)^{999} = -AE = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти несколько первых степеней матриц A^2, A^3 и применить метод полной математической индукции.

Ответ: имеем (см. указание) $A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2+2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix},$$

тогда $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Поэтому $A^{100} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$,

так как $2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1 = \dfrac{2^{n-1} \cdot 2 - 1}{2-1} = 2^n - 1$.

Ответ: пусть $T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

1.28. Найти наименьшее $n \in N$, при котором выполняется равенство $\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Записать левую часть в виде матрицы задачи **1.27,** п. 3.

Ответ: согласно указанию

$$\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6} \\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{6} = 0 \\ \cos\frac{\pi n}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow n = 6k,\ k \in N. \text{ Наименьшее } n = 12.$$

1.29. Учитывая, что предел матрицы равен матрице из пределов ее элементов, найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, где $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in R$, когда он существует;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} T^k(\varphi/n)$, где $T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in R$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\lim\limits_{n\to\infty}\left(A_n^n - E\right)\right)$, где $A^n = \begin{pmatrix} 1 & x/n \\ -x/n & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}\det(A^k))/\det(\sum\limits_{k=1}^{n}A^k)$, $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$; $a\neq -1$;

6) с помощью матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ образуется последовательность: $\overrightarrow{x_{n+1}}=A\overrightarrow{x_n}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Найти предел отношения координат вектора $\overrightarrow{x_n}$ при $n\to\infty$ при условии, что он существует.

Решение

Пп.1,2 – степень матрицы найти методом математической индукции; убедиться, что в п.2 элемент $a_{12}(n)$ матрицы A^n имеет вид: $a_{12}(n)=1+a+a^2+...+a^{n-1}$.

3. Использовать ответ задачи 1.27 п.3 для нахождения $T^k(\varphi/n)$; при вычислении суммы матриц можно использовать формулы:

$$A^n=\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\cos\frac{n+1}{2}\alpha\times\sin\frac{n\alpha}{2}/\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$B^n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\sin\frac{n+1}{2}\alpha\times\sin\frac{n\alpha}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}$$ или использовать при $\alpha=\frac{\varphi}{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty}A_n/n=\int\limits_0^1\cos(x\varphi)dx$; $\lim\limits_{n\to\infty}B_n/n=\int\limits_0^1\sin(x\varphi)dx$.

4. Записать A_n в виде $A_n=\left(1+(x/n)^2\right)^{1/2}T(\varphi)$, где $T(\varphi)$ – матрица из п.3 и $tg(\varphi)=x/n$.

5. См. указание к пп.1,2.

6. Пусть (a_n,b_n) – координаты вектора $\overrightarrow{x_n}$, $a-(a_{n+1},b_{n+1})$ – вектора $\overrightarrow{x_{n+1}}$ и $\overrightarrow{x_n}$.

1.30[1]**.** Вычислить определитель n-го порядка матрицы $A=\left[a_{ij}\right]$,

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{|i-j|}, & i\neq j\\ 2, & i=j\end{cases}.$$

Решение

Прибавим вторую строку к первой, третью строку ко второй,…, n-ую строку к $(n-1)$-й, получим

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & -1 & +1 & \ldots & \pm1 & \mp1\\ -1 & 2 & -1 & \ldots & \mp1 & \pm1\\ +1 & -1 & 2 & \ldots & \pm1 & \mp1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \mp1 & \pm1 & \mp1 & \ldots & 2 & -1\\ \pm1 & \mp1 & \pm1 & \ldots & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1\\ \pm1 & \mp1 & \pm1 & \mp1 & \ldots & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем первый столбец из второго. Далее вычтем полученный второй столбец из третьего,… и, наконец, $(n-1)$-й столбец из n-го. В итоге получим

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n+1\end{vmatrix}=n+1.$$

[1]Задача предложена на IMC2002.

1.31. Вычислить определитель n-го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение

Разложим определитель по первой строке

$$\Delta_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Первый из полученных определителей имеет тот же вид, что и Δ_n. Раскладывая второй определитель по первому столбцу, получаем рекуррентное уравнение

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} + 4\Delta_{n-2}.$$

Решение уравнения будем искать в виде

$$\Delta_n = C_1 a^n + C_2 b^n,$$

где a и b – корни уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$, то есть

$$\Delta_n = C_1 \left(-1\right)^n + C_2 4^n,$$

а коэффициенты C_1 и C_2 подберём так, чтобы при $n = 1$ и $n = 2$ матрица давала бы правильные результаты. Получаем $a = \dfrac{1}{5}$ и

$b=\frac{4}{5}$. Следовательно, искомый определитель равен $\Delta_n=\frac{1}{5}\left[(-1)^n+4^{n+1}\right]$.

1.32[2]**.** Найти наименьший возможный ранг квадратной матрицы n-го порядка у которой все диагональные элементы равны нулю, а все остальные элементы положительны.

Решение

При $n=1$ матрица есть (0) и её ранг равен нулю. При $n=2$ определитель отрицательный, а ранг равен двум. Покажем, что для всех $n\geq 3$ минимальный ранг указанных в условии матриц будет равен 3.

Отметим, что первые три строки линейно независимы.

Приведём пример такой матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ (-1)^2 & 0^2 & 1^2 & \dots & (n-2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1+n)^2 & (-2+n)^2 & (-3+n)^2 & \dots & 0^2 \end{pmatrix} = \left((i-j)^2\right)_{i,j=1}^{n} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1^2 & 1^2 & \dots & 1^2 \\ 2^2 & 2^2 & \dots & 2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & n^2 & \dots & n^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что сумма 3 матриц, ранг которых равен 1, не может быть выше трёх.

---

[2] Задача предложена на IMC2012.

1.33[3]. Существует ли вещественная матрица третьего порядка, такая что: $\operatorname{tr} A = 0$ и $A^2 + A^T = E$?

Решение

Пусть $\operatorname{tr} A = 0$ и $A^2 + A^T = E$. Транспонируя уравнение, получим

$$A = E - \left(A^2\right)^T = E - \left(A^T\right)^2 = E - \left(E - A^2\right)^2 = 2A^2 - A^4,$$

$$A^4 - 2A^2 + A = 0.$$

Корни уравнения

$$x^4 - 2x^2 + x = x(x-1)\left(x^2 + x - 1\right) = 0,$$

$0, 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ могут быть собственными числами матрицы A, собственными числами матрицы A^2 могут быть $0, 1, \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Так как $\operatorname{tr} A = 0$, то сумма её собственных чисел также равна нулю, но $\operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr}\left(E - A^T\right) = 3$ и сумма квадратов собственных чисел также должна быть равна трём. Легко убедиться, что эти два условия не могут быть выполнены одновременно.

Ответ: не существует.

1.34. Найти наибольшее значение функции $f = \left|\chi_1 \chi + \chi_1\chi_4 + \chi_2\chi_3 - \chi_2 \chi_4\right|$ на единичном кубе $\left\{\chi \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, |\chi_k| \le 1, 1 \le k \le 4\right\}$.

[3] Задача предложена на IMC2011.

Решение

$$f=\left|x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3-x_2x_4\right|\le\left|x_1\right|\cdot\left|x_3+x_4\right|+$$

$$+\left|x_2\right|\cdot\left|x_3-x_4\right|\le\left|x_3+x_4\right|+\left|x_3-x_4\right|.$$

Без ограничения общности можно считать, что $x_3\ge x_4\ge 0$, поэтому $f\le 2x_3=2$. Это значение достигается, например, в точке $x_k=1, 1\le k\le 4$.

Замечание.

Заметим, что относительно каждой координаты x_k (при фиксированных остальных) функция имеет вид $\left|ax_k+b\right|$, поэтому наибольшее значение функция принимает при $x_k=-1$ или $x_k=1$. Следовательно, максимальное значение достигается в каких-то вершинах куба, которых 16. Ситуация здесь аналогична тому, что выпуклая непрерывная функция достигает максимума на компакте в некоторой крайней точке этого компакта.

1.35. В квадратной матрице A порядка $2n$ на главной диагонали стоят нули, а остальные элементы равны ± 1. Доказать, что $\det A\ne 0$.

Решение

Рассмотрим матрицу $B=A^2$. В ней b_{ii} – нечетные числа (сумма нуля и нечетного числа ± 1), а b_{ij}, $i\ne j$, – четные числа (сумма двух нулей и четного числа ± 1). Следовательно, $\det A^2=(\det A)^2$ – нечетное число.