

Неравенства для средних ¹

Г.И. Фалин

д.ф.м.н., профессор
кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ им.М.В.Ломоносова

А.И. Фалин

к.ф.м.н., доцент
кафедра общей математики
факультет ВМК
МГУ им.М.В.Ломоносова

¹ *Математика*, Издательский Дом "Первое Сентября", 2006, №10, стр.25-36.

Глава 1

Введение

Программа по математике для поступающих в МГУ содержит два пункта, относящихся к доказательству неравенств:

II.7 Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.

III.2 На экзамене по математике поступающий должен уметь: ... доказывать ... неравенства для буквенных выражений.

Соответственно, в последние годы на вступительных экзаменах по математике в МГУ регулярно предлагаются задачи на доказательство неравенств. Особенно часто их дают на устном экзамене на факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК). Задачи, где неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел, используется при решении уравнений, неравенств и систем методом оценок, появляются в вариантах письменных экзаменов на всех факультетах.

В принципе все эти задачи можно решить с помощью неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического двух неотрицательных чисел, но часто использование общего неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического (когда количество чисел больше двух) и более общих понятий (таких как среднее гармоническое и среднее квадратичное) и соответствующих неравенств позволяет по-другому взглянуть на задачу и предложить короткое и изящное решение. В настоящей статье мы кратко изложим соответствующую теорию и покажем, как она применяется при решении реальных экзаменационных задач.

Глава 2

Основные определения и факты

2.0.1 Случай двух чисел

Определение среднего арифметического двух чисел хорошо известно:

Определение 1 Средним арифметическим чисел x_1 и x_2 называется число

$$A(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (2.1)$$

Если числа x_1 и x_2 равны ($x_1 = x_2 = x$), то их среднее арифметическое совпадает с ними. Если же они различны, то на числовой оси среднее арифметическое лежит точно посередине между точками x_1 и x_2 . Доказать это очень легко: если, например, $x_1 < x_2$, то

1. верно двойное неравенство $x_1 < A(x_1, x_2) < x_2$ (т.е. точка $A(x_1, x_2)$ лежит между точками x_1 и x_2)
2. число $A(x_1, x_2) - x_1$ (расстояние от точки x_1 до точки $A(x_1, x_2)$) равно числу $x_2 - A(x_1, x_2)$ (расстоянию от точки $A(x_1, x_2)$ до точки x_2).

Эти два свойства среднего арифметического оправдывают появление слова "среднее" в его определении. Конечно, формально можно дать любое определение, но каждый термин должен быть оправдан с интуитивной точки зрения.

Ниже мы введем несколько других средних величин – среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратичное, среднее степенное, плюс соответствующие понятия не для двух, а для нескольких

чисел. Для них термин "среднее" означает "расположенный между" (но не обязательно точно посередине) – именно такой смысл вкладывается в слово "среднее" в современном русском языке и в математике.

Поговорим теперь о среднем геометрическом двух чисел.

Определение 2 Средним геометрическим неотрицательных чисел x_1 и x_2 называется число

$$G(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}. \quad (2.2)$$

Школьников часто ставит в тупик вопрос: величина $\sqrt{x_1 x_2}$ определена и в случае, когда x_1 и x_2 – отрицательны; почему же в этом случае ее не называют средним геометрическим?

Ответ крайне прост. В принципе ничто не мешает это сделать, но тогда термин "среднее" не будет оправдан, т.к. число $\sqrt{x_1 x_2}$ – положительно и не может лежать между числами x_1 и x_2 (например, если $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, то $\sqrt{x_1 x_2} = 2$). Кроме того, усложнится формулировка основного результата для среднего арифметического и среднего геометрического – неравенства

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2},$$

а математики очень не любят не изящные формулировки.

В случае, когда оба числа x_1 и x_2 – неотрицательны, их среднее геометрическое лежит между точками x_1 и x_2 (хотя при $x_1 = x_2 = x > 0$ совпадает с ними, при $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ совпадает с $x_1 = 0$, при $x_2 = 0$, $x_1 > 0$ совпадает с $x_2 = 0$). Например, если $0 < x_1 < x_2$, то требуемое утверждение сводится к двойному неравенству $x_1 < \sqrt{x_1 x_2} < x_2$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} x_1^2 < x_1 x_2 \\ x_1 x_2 < x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(x_2 - x_1) > 0 \\ x_2(x_2 - x_1) > 0 \end{cases}$$

и поэтому истинно (все множители – положительны).

Основное утверждение для среднего арифметического и среднего геометрического двух неотрицательных чисел x_1 и x_2 – это знаменитая теорема (неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел):

Теорема 1 Если числа x_1 и x_2 – неотрицательны, то

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

или, используя обозначения (2.1), (2.2),

$$G(x_1, x_2) \leq A(x_1, x_2), \quad (2.3)$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$:

$$\sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2. \quad (2.4)$$

Доказательство обоих результатов сводится к цепочке равносильных преобразований, приводящих исходное неравенство (равенство) к неравенству (равенству) для полного квадрата:

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} &\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

На вступительных экзаменах часто приходится пользоваться важным следствием этих результатов – неравенством для суммы двух взаимно обратных положительных чисел $x_1 = x$ и $x_2 = \frac{1}{x}$:

Теорема 2 Если $x > 0$, то

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

причем

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Более того, наличие в задаче двух взаимно обратных чисел часто является сигналом, что решение должно базироваться на этом неравенстве.

Если в задаче стоит сумма двух взаимно обратных чисел $t = x + \frac{1}{x}$, но из условия задачи не следует, что они положительны, то нужно рассматривать два логически возможных случая, $x > 0$ и $x < 0$. В первом случае можно применять теорему 2, что дает оценку $t \geq 2$. Во втором случае часто полезно следующее преобразование $t = -((-x) + \frac{1}{-x})$. Число $-x$ уже

положительно. Поэтому теорема 2 влечет, что $((-x) + \frac{1}{-x}) \geq 2$. Соответственно, можно утверждать, что $t = x + \frac{1}{x} \leq -2$, причем знак равенства в этом нестрогом неравенстве стоит тогда и только тогда, когда $x = -1$ (напомним, что мы рассматриваем случай $x < 0$).

Решение многих экзаменационных задач становится проще (и додуматься до него – легче), если использовать другие средние: среднее гармоническое и среднее квадратичное.

Определение 3 Средним гармоническим положительных чисел x_1 и x_2 называется число

$$H(x_1, x_2) = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{H(x_1, x_2)} = A\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right),$$

среднее гармоническое – это такое число, что обратное к нему является средним арифметическим чисел, обратных к исходным.

Требование положительности чисел x_1 и x_2 , кроме справедливости прочих естественных утверждений, гарантирует существование числа $\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$.

Как и для среднего арифметического и среднего геометрического, легко доказать, что среднее гармоническое лежит между числами x_1 и x_2 (совпадая с ними в случае, когда числа равны).

Поскольку

$$G\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right) = \frac{1}{G(x_1, x_2)},$$

из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ (теорема 1) следует

Теорема 3 Если числа x_1 и x_2 – положительны, то

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1x_2} \Leftrightarrow H(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2), \quad (2.5)$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Этот результат легко получить и непосредственно. Например, неравенство (2.5) означает, что

$$\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \leq \sqrt{x_1x_2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x_1x_2}}{x_1+x_2} \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1x_2} \leq x_1+x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2},$$

т.е. равносильно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел x_1 и x_2 .

Определение 4 Средним квадратичным неотрицательных чисел x_1 и x_2 называется число

$$K(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Другими словами, среднее квадратичное – это такое неотрицательное число, что его квадрат является средним арифметическим квадратов исходных чисел.

Как и для среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического, легко доказать, что среднее квадратичное лежит между числами x_1 и x_2 (совпадая с ними в случае, когда числа равны). Следует отметить, что величина $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$ определена для любых действительных x_1 и x_2 (не обязательно неотрицательных), но она может и не лежать между точками x_1 и x_2 . Например, если $x_1 = -7$, $x_2 = 1$, то $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = 5$ – в этом случае термин ”среднее квадратичное” вряд ли оправдан. Тем не менее, часто число $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$ называют средним квадратичным и в случае, когда одно или оба из чисел x_1 и x_2 отрицательны. В принципе это вопрос соглашения, но методически более разумным представляется наше определение.

Аналогом предыдущих неравенств для средних является следующее неравенство для среднего арифметического и среднего квадратичного:

Теорема 4 Если x_1 и x_2 – неотрицательные действительные числа, то

$$A(x_1, x_2) \leq K(x_1, x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, \quad (2.6)$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Этот результат легко получить непосредственно. Возводя неравенство (2.6) почленно в квадрат, мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} &\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \leq 2x_1^2 + 2x_2^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(на первом шаге мы использовали неотрицательность чисел x_1, x_2). Это доказательство в сущности повторяет рассуждения, использовавшиеся при доказательстве неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

В общем случае (без ограничения $x_1, x_2 \geq 0$), мы имеем:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \leq \left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq \frac{|x_1| + |x_2|}{2} \leq \sqrt{\frac{|x_1|^2 + |x_2|^2}{2}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Если нестрогое неравенство (2.6) сводится к равенству, то мы имеем следующую цепочку равносильных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} &\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

По аналогии со средним квадратичным вводят более общее понятие среднего степенного порядка n .

Определение 5 Средним степенным порядка n неотрицательных чисел x_1 и x_2 называется число

$$S_n(x_1, x_2) = \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}} = \left(\frac{x_1^n + x_2^n}{2} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Другими словами, среднее степенное порядка n – это такое неотрицательное число, что его n -я степень является средним арифметическим n -х степеней исходных чисел.

Как и для среднего арифметического, среднего геометрического и среднего гармонического, легко доказать, что среднее степенное порядка n лежит между числами x_1 и x_2 (совпадая с ними в случае, когда числа равны). Следует отметить, что величина $\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}$ определена для любых

действительных x_1 и x_2 (не обязательно неотрицательных), но она может и не лежать между точками x_1 и x_2 .

Среднее степенное порядка $n = 2$ – это введенное ранее среднее квадратичное, среднее степенное порядка $n = 1$ – это среднее арифметическое. Более того, среднее гармоническое можно рассматривать как среднее степенное порядка $n = -1$, а среднее геометрическое – это "среднее степенное порядка $n = 0$ " (хотя точный смысл этой фразе можно придать только с использованием более общих понятий и результатов).

Для средних степенных порядка n можно получить следующие неравенства

$$S_2(x_1, x_2) \leq S_3(x_1, x_2) \leq S_4(x_1, x_2) \leq \dots \quad (2.7)$$

Мы не будем доказывать все эти неравенства, а в ходе решения реальных экзаменационных задач докажем те из них, в которых будет необходимость.

Доказанные выше теоремы, связывающие между собой различные средние, в случае $x_1, x_2 > 0$ можно объединить в следующую цепочку неравенств:

$$H(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2) \leq A(x_1, x_2) \leq K(x_1, x_2)$$

2.0.2 Обобщение на случай произвольного количества чисел

До сих пор мы определили средние значения (среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое и среднее квадратичное) для двух чисел. В математике вводят аналогичные понятия для произвольных наборов чисел.

Определение 6 Средним арифметическим чисел $x_1, \dots, x_n$ называется число

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Если $x_{(1)} = \min(x_1, \dots, x_n)$ – наименьшее из этих чисел, а $x_{(n)} = \max(x_1, \dots, x_n)$ – наибольшее из них, то для любого $k = 1, \dots, n$ верно неравенство $x_{(1)} \leq x_k \leq x_{(n)}$. Складывая эти n неравенств, мы получим:

$$nx_{(1)} \leq x_1 + \dots + x_n \leq nx_{(n)} \Leftrightarrow x_{(1)} \leq A(x_1, \dots, x_n) \leq x_{(n)}.$$

Иначе говоря, среднее арифметическое n чисел лежит между самым маленьким и самым большим из них – это оправдывает использование термина "среднее".

Определение 7 Средним геометрическим неотрицательных чисел $x_1, \dots, x_n$ называется число

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Как и для среднего арифметического, легко доказать, что

$$x_{(1)} \leq G(x_1, \dots, x_n) \leq x_{(n)}.$$

Определение 8 Средним гармоническим положительных чисел $x_1, \dots, x_n$ называется число

$$H(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Иначе говоря, среднее гармоническое – это такое число, что обратное к нему является средним арифметическим чисел, обратных к исходным:

$$\frac{1}{H(x_1, \dots, x_n)} = A\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right).$$

Как и для среднего арифметического, легко доказать, что

$$x_{(1)} \leq H(x_1, \dots, x_n) \leq x_{(n)}.$$

Определение 9 Средним квадратичным неотрицательных чисел $x_1, \dots, x_n$ называется число

$$K(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Иначе говоря, среднее квадратичное – это такое неотрицательное число, что его квадрат является средним арифметическим квадратов исходных чисел:

$$K^2(x_1, \dots, x_n) = A(x_1^2, \dots, x_n^2).$$

Как и для среднего арифметического, легко доказать, что

$$x_{(1)} \leq K(x_1, \dots, x_n) \leq x_{(n)}.$$

Для введенных средних значений (среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое и среднее квадратичное) для произвольного набора чисел справедливы неравенства, аналогичные доказанным ранее для случая $n = 2$.

Теорема 5 Если числа $x_1, \dots, x_n$ – неотрицательны, то

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n), \quad (2.8)$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Доказательство этого утверждения требует очень непростых рассуждений.

1 шаг. Докажем неравенство (2.8) для случая $n = 4$. Начнем со следующего простого тождества:

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}.$$

Это равенство утверждает, что среднее арифметическое четырех чисел x_1, x_2, x_3, x_4 можно рассматривать как среднее арифметическое двух чисел, первое из которых – среднее арифметическое x_1, x_2 , а второе – среднее арифметическое x_3, x_4 .

Используя доказанное неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел, можно утверждать, что

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2}.$$

Выражение в правой части этого равенства – это среднее арифметическое чисел $\sqrt{x_1 x_2}$ и $\sqrt{x_3 x_4}$. Применяя еще раз неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел, получим, что

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2} \sqrt{x_3 x_4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = G(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Если

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

то во всех трех использованных неравенствах о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел, должен стоять знак " $=$ ". В силу

теоремы 1, соответствующие числа равны:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_4, \\ \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_3 x_4}, \end{cases}$$

откуда следует, что все четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 равны между собой.

Подобным же образом можно доказать, что справедливость неравенства (2.8) для некоторого значения $n = k$ влечет его справедливость для $n = 2k$. Это означает справедливость неравенства (2.8) для $n = 8$, $n = 16$, $n = 32$ и т.д. (современный стандарт математической строгости требует обоснования этого вывода с помощью метода математической индукции).

2 шаг. Докажем неравенство (2.8) для случая $n = 3$. Для этого заменим в уже доказанном неравенстве

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

число x_4 на $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ (среднее геометрическое чисел x_1, x_2, x_3):

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}{4} &\geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}} \\ &\Downarrow \\ x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} &\geq 4 \sqrt[4]{(x_1 x_2 x_3)^{\frac{4}{3}}} \\ &\Downarrow \\ x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} &\geq 4 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \\ &\Downarrow \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \\ &\Downarrow \\ \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} &\geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \end{aligned}$$

Если $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$, то в приведенной выше цепочке равносильных неравенств везде стоит знак " $\geq$ ". В частности,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}{4} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}$$

Но в случае $n = 4$ мы уже доказали, что равенство между средним арифметическим и средним геометрическим возможно только в случае равенства чисел между собой:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

Это доказывает, что и в случае $n = 3$ равенство между средним арифметическим и средним геометрическим возможно только в случае равенства чисел между собой.

Подобным же образом можно доказать, что справедливость неравенства (2.8) для некоторого значения $n = k$ влечет его справедливость для $n = k - 1$ (для этого нужно заменить x_k на $\sqrt[k-1]{x_1 \dots x_{k-1}}$). Это означает справедливость неравенства (2.8) для всех n . Строгое доказательство этого требует применения метода математической индукции в более общей форме, чем обычно приводится в школьных учебниках – это видимо, самое сложное место в доказательстве нашей теоремы.

Теорема 6 Если числа $x_1, \dots, x_n$ – положительные, то

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_n), \quad (2.9)$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Доказательство. Поскольку

$$G\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{G(x_1, \dots, x_n)},$$

наша теорема следует из теоремы 5 о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$.

Теорема 7 Если числа $x_1, \dots, x_n$ – неотрицательны, то

$$A(x_1, \dots, x_n) \leq K(x_1, \dots, x_n), \quad (2.10)$$

причем это нестрогое неравенство сводится к равенству тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Доказательство. Обозначим для краткости величину $A(x_1, \dots, x_n)$ просто A и рассмотрим выражение

$$X = (x_1 - A)^2 + \dots + (x_n - A)^2.$$

Оно, очевидно, неотрицательно. С другой стороны, раскрывая скобки и приводя подобные, его можно записать в виде:

$$X = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2A(x_1 + \dots + x_n) + nA^2.$$

Поскольку $x_1 + \dots + x_n = nA$, можно утверждать, что

$$X = x_1^2 + \dots + x_n^2 - nA^2.$$

Теперь ясно, что отмеченная в начале доказательства неотрицательность величины X равносильна неравенству (2.10).

Если же в (2.10) стоит знак "=", то величина X равна 0, что равносильно равенству нулю членов $x_1 - A, \dots, x_n - A$. Это, очевидно, означает равенство чисел $x_1, \dots, x_n$ между собой.

Глава 3

Задачи на доказательство неравенств

Задача 1 (ВМК, 2005, устный) Доказать, что если $b \geq -1$, $b \neq 0$, то имеет место неравенство

$$\frac{4b^2 + b + 1}{4|b|} \geq \sqrt{b+1}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{|2b|^2 + (b+1)}{2} \geq \sqrt{|2b|^2 \cdot (b+1)}.$$

Теперь оно сводится к неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух неотрицательных чисел $x = 4b^2$ и $y = b+1$.

Задача 2 (ВМК, 1998, устный) Доказать, что для неотрицательных чисел a, b имеет место неравенство

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

Решение. Раскроем скобки в левой части и разделим почленно на 2:

$$\frac{(a+b) + 2\sqrt{ab}}{2} \geq \sqrt{(a+b) \cdot 2\sqrt{ab}}.$$

В таком виде – это неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел $x_1 = (a+b)$, $x_2 = 2\sqrt{ab}$.

Задача 3 (ВМК, 1994, устный) Известно, что 5 положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_5$ связаны соотношением $a_1 a_2 \cdots a_5 = 1$. Доказать, что в этом случае справедливо неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_5) \geq 32.$$

Решение. Запишем неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел, $x_1 = 1$ и $x_2 = a_k$ (для каждого $k = 1, \dots, 5$):

$$\frac{1 + a_k}{2} \geq \sqrt{a_k}.$$

Перемножая эти неравенства, мы получим:

$$\frac{(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_5)}{32} \geq \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_5}.$$

По условию задачи число под знаком корня в правой части равно 1. Поэтому последнее неравенство немедленно дает требуемое утверждение.

Задача 4 (ВМК, 2004, устный) Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{b+a} \geq 3.$$

Решение. Введем новые переменные $x_1 = b+c$, $x_2 = a+c$, $x_3 = b+a$; они, очевидно, положительны. Основные переменные могут быть выражены через них в виде: $2a = -x_1 + x_2 + x_3$, $2b = x_1 - x_2 + x_3$, $2c = x_1 + x_2 - x_3$. Соответственно неравенство, которое мы должны доказать, примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{-x_1+x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_1-x_2+x_3}{x_2} + \frac{x_1+x_2-x_3}{x_3} &\geq 3 \\ \Downarrow \\ \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}\right) + \left(\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3}\right) + \left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) &\geq 6. \end{aligned}$$

В силу неравенства для суммы двух взаимно обратных положительных чисел каждая из трех скобок в левой части последнего неравенства больше или равна 2. Соответственно, можно гарантировать, что вся левая часть больше или равна 6, что и требовалось доказать.

Задача 5 (ВМК, 1994, устный) Доказать, что для любых четырех действительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd.$$

Решение. Рассмотрим неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел $x_1 = a^4$, $x_2 = b^4$, $x_3 = c^4$, $x_4 = d^4$:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4 b^4 c^4 d^4}.$$

Выражение в правой части равно $|abcd|$; оно больше или равно $abcd$ – это и доказывает требуемое неравенство.

Мы рекомендуем читателю, используя рассуждения, проведенные в ходе первого шага доказательства теоремы 5, дать независимое решение этой задачи, опирающееся только на неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел. Дело в том, что в соответствии с Программой по математике для поступающих в МГУ "объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, ... могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать." Это замечание относится и к другим аналогичным задачам.

Задача 6 (ВМК, 1996, устный) Для положительных чисел a , b , c доказать неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq 1.$$

Выражение в левой части – это среднее арифметическое трех чисел $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{b}{c}$, $x_3 = \frac{c}{a}$. Среднее геометрическое этих чисел равно

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 1,$$

так что наше неравенство сводится к неравенству для среднего арифметического и среднего геометрического трех указанных чисел.

Задача 7 (ВМК, 1990+1994+1996, устный) Доказать, что для любых 3 положительных чисел a , b , c выполняется неравенство

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Решение.

1 способ. Перепишем неравенство, которое нужно доказать, в виде

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Выражение в левой части – это среднее арифметическое чисел a , b и c . Выражение в правой части является средним гармоническим чисел a , b и c . Таким образом, наше неравенство утверждает, что среднее арифметическое больше среднего гармонического или равно ему (этот факт следует из теорем 5 и 6).

2 способ. Как мы рекомендовали читателю, полезно давать независимое решение подобных задач, опирающееся только на неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел. В данном случае такое решение выглядит следующим образом.

Раскрывая скобки в левой части, преобразуем наше неравенство к виду

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6.$$

Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух взаимно обратных чисел, можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2, \\ \frac{a}{c} + \frac{c}{a} &\geq 2, \\ \frac{b}{c} + \frac{c}{b} &\geq 2. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства почленно, мы получим желаемое неравенство.

Задача 8 (ВМК, 2003, устный) Доказать, что для любых положительных a , b , c не могут одновременно выполняться неравенства:

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}. \quad (3.1)$$

Решение. Допустим противное, что все три неравенства (3.1) одновременно справедливы. Поскольку числа a , b , c – положительны, тогда справедливы и неравенства

$$1-b > \frac{1}{4a}, \quad 1-c > \frac{1}{4b}, \quad 1-a > \frac{1}{4c}.$$

Сложим эти неравенства почленно:

$$\begin{aligned} 3 - (a + b + c) &> \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &\Downarrow \\ 1 - \frac{a+b+c}{3} &> \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \\ &\Downarrow \\ A + \frac{1}{4H} &< 1, \end{aligned}$$

где $A = A(a, b, c)$ – среднее арифметическое чисел a, b, c , $H = H(a, b, c)$ – их среднее гармоническое.

Применяя к сумме $A + \frac{1}{4H}$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим:

$$1 > A + \frac{1}{4H} \geq 2\sqrt{A \cdot \frac{1}{4H}} = \sqrt{\frac{A}{H}}.$$

Отсюда следует, что $A < H$, что противоречит неравенству о среднем арифметическом и среднем гармоническом.

Задача 9 (ВМК, 2000, устный) Доказать, что для неотрицательных чисел a, b и c имеет место неравенство

$$\frac{a + b + c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.$$

Решение. Выражение в левой части – это среднее арифметическое чисел a, b и c . Выражение в правой части – среднее квадратичное чисел a, b и c . Таким образом, наше неравенство утверждает, что среднее арифметическое меньше среднего квадратичного или равно ему (теорема 7).

Задача 10 (ВМК, 1998, устный) Доказать, что при $a \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}.$$

Решение. Умножим и разделим правую часть неравенства на $\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} &< \frac{2}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}} \\ &\Downarrow \\ \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}}{2} &< \sqrt{a} \end{aligned}$$

Выражение в левой части – это среднее арифметическое чисел $x_1 = \sqrt{a+1}$ и $x_2 = \sqrt{a-1}$. Среднее квадратичное этих чисел равно

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{a+1 + a-1}{2}} = \sqrt{a},$$

так что неравенство, которое нужно доказать, свелось к неравенству для среднего арифметического и среднего квадратичного двух неравных чисел.

Задача 11 (психолог., 1987, №6) Доказать, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$$

удовлетворяют неравенству

$$x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4-2x^2+1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Решение. Второе неравенство можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} ((x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1) + \left(\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - 2\sqrt[3]{x^2-1} + 1 \right) &> 2 \\ \Downarrow \\ (\sqrt{x-1} + 1)^2 + \left(\sqrt[3]{x^2-1} - 1 \right)^2 &> 2 \end{aligned}$$

Если мы обозначим $\sqrt{x-1} + 1$ через a , $\sqrt[3]{x^2-1} - 1$ через b , то оно примет вид:

$$a^2 + b^2 > 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} > 1.$$

Первое неравенство в терминах новых переменных означает, что $\frac{a+b}{2} > 1$. Поскольку среднее квадратичное двух чисел больше или равно их среднего арифметического, неравенство $\frac{a+b}{2} > 1$ влечет неравенство $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > 1$.

Задача 12 (ВМК, 1999, устный) Пусть $a + b = 2$. Доказать, что $a^3 + b^3 \geq 2$.

Решение. 1 способ. Исключим переменную b : $b = 2 - a$. Тогда неравенство $a^3 + b^3 \geq 2$ примет вид:

$$\begin{aligned} a^3 + (2 - a)^3 &\geq 2 \\ \Downarrow \\ (a - 2)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2 способ. Равенство $a + b = 2$ означает, что среднее арифметическое чисел a и b равно 1: $A(a, b) = 1$. Неравенство, которое нужно доказать, можно записать в виде: $\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geq 1$. Поэтому оно означает, что среднее степенное порядка 3 чисел a и b , больше или равно 1. Этот результат следует из общего неравенства для среднего арифметического и среднего степенного порядка 3:

$$\frac{a + b}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}. \quad (3.2)$$

Его справедливость доказывается следующей цепочкой равносильных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \\ \Downarrow \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 &\leq \frac{a^3+b^3}{2} \\ \Downarrow \\ (a+b)^3 &\leq 4(a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ \Downarrow \\ 3(a+b)(a-b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Задача 13 (мех-мат, 1962) Пусть a и b – произвольные числа, причем $a + b = 2$. Доказать, что $a^4 + b^4 \geq 2$.

Решение. 1 способ. Исключим переменную b : $b = 2 - a$. Тогда неравенство $a^4 + b^4 \geq 2$ примет вид:

$$\begin{aligned} a^4 + (2 - a)^4 &\geq 2 \\ \Downarrow \\ a^4 - 4a^3 + 12a^2 - 16a + 7 &\geq 0 \\ \Downarrow \\ (a - 1)^2 \cdot ((a - 1)^2 + 6) &\geq 0. \end{aligned}$$

2 способ. Равенство $a+b=2$ означает, что среднее арифметическое чисел a и b равно 1: $A(a, b) = 1$. Неравенство, которое нужно доказать, можно записать в виде: $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq 1$. Поэтому оно означает, что среднее степенное порядка 4 чисел a и b , больше или равно 1. Этот результат следует из ранее доказанного (теорема 4) неравенства для среднего арифметического и среднего квадратичного:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

и общего неравенства для среднего квадратичного и среднего степенного порядка 4:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}.$$

(оно получается из предыдущего неравенства заменой a на a^2 и b на b^2).

Задача 14 (ВМК, 2004, устный) Пусть a и b – положительные числа. Доказать, что

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$$

Решение. 1 способ. Разложим выражение a^6+b^6 на множители и после сокращения общего множителя a^2+b^2 проведем упрощения:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)}{8} &\leq \frac{(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)}{2} \\ &\Leftrightarrow \\ 3a^4 - a^3b - 4a^2b^2 - ab^3 + 3b^4 &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow \\ (a-b)^2 \cdot (3a^2 + 5ab + 3b^2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Выражение $3a^2 + 5ab + 3b^2$ можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно a ; его дискриминант равен $-11b^2$ и поэтому этот трехчлен положителен при всех a и b .

2 способ. Неравенство, которое нужно доказать, можно записать как неравенство для средних степенных чисел a и b :

$$S_1(a, b) \cdot S_2^2(a, b) \cdot S_3^3(a, b) \cdot S_6^6(a, b).$$

Для его справедливости достаточно выполнения трех неравенств:

$$S_1(a, b) \leq S_6(a, b), \quad S_2(a, b) \leq S_6(a, b), \quad S_3(a, b) \leq S_6(a, b).$$

Заменяя в неравенстве (2.6) для среднего арифметического и среднего квадратичного чисел x_1 и x_2 переменную x_1 на a^3 , а переменную x_2 на b^3 и извлекая кубический корень из обеих частей получившегося неравенства, мы получим неравенство для средних степенных порядка 3 и 6: $S_3(a, b) \leq S_6(a, b)$.

Подобным же образом, применяя неравенство (3.2) для среднего арифметического и среднего степенного порядка 3 к числам a^2 и b^2 , мы получим неравенство для средних степенных порядка 2 и 6: $S_2(a, b) \leq S_6(a, b)$. Тогда, тем более, $S_1(a, b) \leq S_6(a, b)$.

Глава 4

Применение к сравнению чисел

Задача 15 (геологический ф-т, 2004, устный) Сравните числа $\sqrt{2002} + \sqrt{2004}$ и $2\sqrt{2003}$.

Решение. Будем сравнивать не исходные числа, а числа $\frac{\sqrt{2002} + \sqrt{2004}}{2}$ и $\sqrt{2003}$. Первое число – это среднее арифметическое чисел $\sqrt{2002}$ и $\sqrt{2004}$, а второе – их среднее квадратичное. Поэтому первое число меньше.

Задача 16 (ВМК, устный, 2000) Что больше, $\lg 7 \cdot \lg 13$ или 1?

Решение. Применим к неравным положительным числам $x_1 = \lg 7$ и $x_2 = \lg 13$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\sqrt{\lg 7 \cdot \lg 13} < \frac{\lg 7 + \lg 13}{2}.$$

Правую часть этого неравенства можно оценить сверху следующим образом:

$$\frac{\lg 7 + \lg 13}{2} = \frac{\lg(7 \cdot 13)}{2} = \frac{\lg 91}{2} < \frac{1}{2} \cdot \lg 100 = \lg \sqrt{100} = \lg 10 = 1.$$

Поэтому 1 больше, чем $\lg 7 \cdot \lg 13$.

Глава 5

Применение к доказательству геометрических неравенств

Задача 17 (ВМК, 2000, устный) Доказать, что сумма длин высот треугольника не менее чем в девять раз превосходит радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Решение. В школьной планиметрии есть только одна величина, которая связана как с высотами треугольника, так и с радиусом вписанной в этот треугольник окружности – это площадь треугольника. Соответствующие формулы хорошо известны:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a \\ S &= \frac{1}{2}bh_b \\ S &= \frac{1}{2}ch_c \\ S &= \frac{1}{2}(a+b+c)r \end{aligned}$$

Здесь: S – площадь треугольника, a, b, c – длины его сторон, h_a, h_b, h_c – длины высот, проведенных к сторонам a, b, c соответственно, r – радиус окружности, вписанной в треугольник.

Исключим из этих равенств переменную S и выразим высоты через стороны:

$$\begin{aligned}h_a &= \frac{r(a+b+c)}{a} \\h_b &= \frac{r(a+b+c)}{b} \\h_c &= \frac{r(a+b+c)}{c}\end{aligned}$$

Складывая эти равенства почленно, мы получим:

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{r} = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}.$$

Правая часть этого равенства появилась в задаче 7, где было доказано, что она не меньше 9. Поэтому можно утверждать, что

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{r} \geq 9. \quad (5.1)$$

Задача 18 (ВМК, 1996, устный) Доказать, что $l_a + l_b + l_c \geq 9r$, где l_a, l_b, l_c – биссектрисы треугольника, а r – радиус вписанной окружности.

Решение. Поскольку перпендикуляр – кратчайшее расстояние от точки до прямой, биссектриса не может быть короче соответствующей высоты:

$$\begin{aligned}l_a &\geq h_a, \\l_b &\geq h_b, \\l_c &\geq h_c.\end{aligned}$$

Поэтому $l_a + l_b + l_c \geq h_a + h_b + h_c$ и требуемое неравенство немедленно следует из неравенства (5.1).

Задача 19 (ВМК, 2003, устный) Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, длины сторон которого равны a, b, c и d соответственно, не превосходит $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$.

Решение. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей двух треугольников, ABC и ACD . Если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, то

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}ab \sin B \leq \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2), \\ S_{ACD} &= \frac{1}{2}cd \sin D \leq \frac{1}{2}cd \leq \frac{1}{4}(c^2 + d^2). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получим требуемый результат.

Задача 20 (ВМК, 2002, устный) В треугольнике со сторонами a , b , c и лежащими против этих сторон углами α , β , γ выполняется условие

$$a < \frac{b+c}{2}. \quad (5.2)$$

Доказать, что тогда

$$\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}. \quad (5.3)$$

Решение. Прежде всего преобразуем неравенство (5.3), которое нужно доказать, к виду, содержащему только стороны треугольника (поскольку данное нам неравенство (5.2) содержит лишь стороны).

Поскольку сумма углов треугольника равна π , сумма $\beta + \gamma$ равна $\pi - \alpha$, так что неравенство (5.3) равносильно неравенству

$$\alpha < \frac{\pi - \alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Далее, угол α , как угол треугольника, удовлетворяет двойному неравенству $0 < \alpha < \pi$. На промежутке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ монотонно убывает. Поэтому неравенство $\alpha < \frac{\pi}{3}$ равносильно неравенству $\cos \alpha > \frac{1}{2}$. Применяя теорему косинусов ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$), мы сведем это неравенство к неравенству относительно сторон треугольника:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2 - bc. \quad (5.4)$$

Итак, мы должны доказать, что неравенство (5.2) влечет неравенство (5.4). Для этого достаточно показать, что всегда выполнено неравенство

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \leq b^2 + c^2 - bc. \quad (5.5)$$

Упростим это неравенство раскрывая скобки и приводя подобные:

$$\begin{aligned}\frac{b^2+2bc+c^2}{4} &\leq b^2 + c^2 - bc \\ &\Downarrow \\ b^2 + 2bc + c^2 &\leq 4b^2 + 4c^2 - 4bc \\ &\Downarrow \\ 3b^2 - 6bc + 3c^2 &\geq 0 \\ &\Downarrow \\ 3(b-c)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Итак, неравенство (5.5) равносильно истинному неравенству и потому истинно.

В ходе преобразований на последнем этапе наших рассуждений мы фактически повторили доказательство неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Вместо этого можно было чуть изменить эти преобразования:

$$\begin{aligned}\frac{b^2+2bc+c^2}{4} &\leq b^2 + c^2 - bc \\ &\Downarrow \\ b^2 + 2bc + c^2 &\leq 4b^2 + 4c^2 - 4bc \\ &\Downarrow \\ 6bc &\leq 3b^2 + 3c^2 \\ &\Downarrow \\ bc &\leq \frac{b^2+c^2}{2},\end{aligned}$$

после чего сослаться на неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Задача 21 (ВМК, 1990, устный) Доказать, что если a и b – катеты прямоугольного треугольника, а c – его гипотенуза, то $a+b \leq c\sqrt{2}$, причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда треугольник равнобедренный.

Решение. 1 способ. Возведем неравенство, которое нужно доказать, в квадрат: $a^2 + 2ab + b^2 \leq 2c^2$. Поскольку по смыслу задачи переменные a, b, c – положительны, полученное неравенство равносильно исходному, т.е. оба эти неравенства истинны или ложны одновременно.

Заменяя с помощью теоремы Пифагора выражение c^2 в правой части выражением $a^2 + b^2$, сведем задачу к неравенству с двумя переменными

a и b :

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &\leq 2(a^2 + b^2) \\ &\Downarrow \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ &\Downarrow \\ (a - b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Эта цепочка равносильных преобразований доказывает справедливость исходного неравенства.

Проделанные преобразования практически не меняются, если в исходном неравенстве стоял знак равенства – просто во всех последующих нестрогих неравенствах вместо знака неравенства будет стоять знак " $=$ ". В частности, заключительным в ходе этих преобразований станет равенство $(a - b)^2 = 0$, которое равносильно тому, что $a = b$, т.е. треугольник равнобедренный.

2 способ. С помощью теоремы Пифагора неравенство $a + b \leq c\sqrt{2}$ можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} a + b &\leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ &\Downarrow \\ \frac{a+b}{2} &\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \end{aligned}$$

так что оно сводится к неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратичном чисел a и b , и поэтому справедливо. Кроме того, мы знаем, что знак равенства в неравенстве о среднем арифметическом и среднем квадратичном чисел a и b достигается тогда и только тогда, когда $a = b$ – в терминах нашей задачи это означает, что треугольник равнобедренный.

Нетрудно понять, что в ходе первого способа решения мы фактически повторяли доказательство неравенства о среднем арифметическом и среднем квадратичном чисел a и b (теорема 4).

Задача 22 (ВМК, 2002+2006, устный) Доказать, что в прямоугольном треугольнике

$$\frac{c}{r} \geq 2(1 + \sqrt{2}),$$

где c – длина гипотенузы, а r – радиус вписанной окружности.

Решение. Для любого треугольника со сторонами a, b, c радиус вписанной окружности может быть подсчитан по формуле

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

В случае прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}ab$ (a и b – катеты), так что

$$r = \frac{ab}{a + b + c}.$$

Поэтому неравенство, которое нужно доказать, сводится к неравенству

$$\frac{c(a + b + c)}{ab} \geq 2(1 + \sqrt{2}).$$

В задаче 21 было доказано, что $c \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b)$. Используя эту оценку, мы имеем:

$$\frac{c(a + b + c)}{ab} \geq \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(a + b) \left(a + b + \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b) \right)}{ab} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \frac{(a + b)^2}{ab}.$$

Дробь $\frac{(a+b)^2}{ab}$ оценим с помощью неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического:

$$\frac{(a + b)^2}{ab} \geq \frac{(2\sqrt{ab})^2}{ab} = 4.$$

Таким образом,

$$\frac{c}{r} \geq \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \cdot 4 = 2(1 + \sqrt{2}).$$

Глава 6

Применение к решению уравнений, неравенств и систем

Задача 23 (химический ф-т, 2003, июль, №4) *Решить уравнение*

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2-x}) = 8.$$

Решение. Для сокращения записей при последующих преобразованиях введем новые переменные

$$a = \sqrt{x}, \quad b = \sqrt{2-x}.$$

Отметим, что $a, b > 0$.

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) (a + b) = 8.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 6. \quad (6.1)$$

Обращая внимание на наличие взаимно обратных положительных чисел, применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометри-

ческом к каждой из трех скобок в левой части уравнения (6.1):

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &\geq 2, \\ b + \frac{1}{b} &\geq 2, \\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства почленно, мы получим, что

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 6, \quad (6.2)$$

причем, если хотя бы в одном из трех использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $>$, а не $\geq$, то и в неравенстве (6.2) будет стоять знак $>$. Поэтому равенство (6.1) равносильно тому, что в этих неравенствах стоит знак $=$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{2-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

Задача 24 (ВМК, 2006, июль, №4) При каждом значении параметра d решить уравнение

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 - y^2 - dx + 3dy - 2d^2} + \sqrt{x - y + d} \cdot \sqrt{4 - 2x + d} + \\ &+ \sqrt{-2x^2 - 2xy + (5d + 4)x + (d + 4)y - 2d^2 - 8d} = 4. \end{aligned}$$

Решение. Выражения под первым и последним радикалами можно рассматривать как квадратные трехчлены относительно переменной x . Попробуем разложить их на множители.

Для многочлена

$$x^2 - y^2 - dx + 3dy - 2d^2 = x^2 - dx - (y^2 - 3dy + 2d^2)$$

дискриминант равен

$$D = d^2 + 4y^2 - 12dy + 8d^2 = 4y^2 - 12dy + 9d^2 = (2y - 3d)^2,$$

так что корни соответствующего квадратного уравнения равны

$$x_{1,2} = \frac{d \pm (2y - 3d)}{2} = y - d; -y + 2d.$$

Поэтому выражение под первым радикалом равно

$$(x - y + d)(x + y - 2d).$$

Для многочлена

$$-2x^2 - 2xy + (5d + 4)x + (d + 4)y - 2d^2 - 8d = -2x^2 - (2y - 5d - 4)x - (2d^2 - dy - 4y + 8d)$$

дискриминант равен

$$D = 4y^2 + 9d^2 + 16 - 12dy + 16y - 24dy = (2y - 3d + 4)^2,$$

так что корни соответствующего квадратного уравнения равны

$$x_{1,2} = \frac{-2y + 5d + 4 \pm (2y - 3d + 4)}{2} = \frac{d + 4}{2}; -y + 2d.$$

Поэтому выражение под последним радикалом равно

$$(-2x + d + 4)(x + y - 2d).$$

Теперь исходное уравнение можно переписать в виде:

$$\sqrt{(x - y + d)(x + y - 2d)} + \sqrt{x - y + d} \cdot \sqrt{4 - 2x + d} + \sqrt{(-2x + d + 4)(x + y - 2d)} = 4.$$

Обращая внимание на повторяющиеся блоки, введем новые переменные:

$$\begin{aligned} a &= x - y + d, \\ b &= x + y - 2d, \\ c &= 4 - 2x + d. \end{aligned}$$

Для них исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{a}\sqrt{c} + \sqrt{bc} = 4. \quad (6.3)$$

Поскольку выражения a , c , ab , bc стоят под знаками арифметических квадратных корней, они неотрицательны. Если бы выражение b было

отрицательным, то отсюда бы следовало, что $a = b = 0$, а тогда левая часть уравнения (6.3) равнялась бы 0. Поэтому $b \geq 0$ и, значит, выражения $\sqrt{ab}$, $\sqrt{ac}$, $\sqrt{bc}$ являются средними геометрическими чисел a и b , a и c , b и c соответственно. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2} = a+b+c.$$

Сумма $a+b+c$ равна

$$(x-y+d) + (x+y-2d) + (4-2x+d) = 4,$$

т.е. в точности правой части уравнения (6.3). Если хотя бы в одном из трех использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $<$, то левая часть уравнения (6.3) была бы меньше 4. Поэтому во всех трех неравенствах достигается знак равенства, что означает равенство чисел a , b , c . Поскольку их сумма равна 4, каждое из них равно $\frac{4}{3}$. Следовательно, уравнение (6.3) равносильно системе:

$$\begin{cases} x-y+d = \frac{4}{3}, \\ x+y-2d = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3d}{2}, \\ x = \frac{3d+8}{6} \end{cases}$$

Таким образом, при каждом $d \in R$ исходное уравнение имеет единственное решение $(x; y) = \left(\frac{3d+8}{6}; \frac{3d}{2}\right)$.

Отметим, что процесс решения исходного уравнения совершенно не зависел от значения параметра d . Это, впрочем, исключительно редкий случай. Обычно, начиная с некоторого места, рассуждения начинают зависеть от параметра, что приводит к ветвлению случаев. В сложных задачах получается “дерево”, в структуре которого довольно тяжело разобратся.

Ответ: при каждом $d \in R$ уравнение имеет единственное решение $(x; y) = \left(\frac{3d+8}{6}; \frac{3d}{2}\right)$.

Задача 25 (мех-мат, 1965, №4) Найти все пары чисел x , y , которые удовлетворяют уравнению

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y.$$

Решение. Поскольку уравнение содержит две неизвестные, естественно попытаться превратить его в систему из двух уравнений. Практически единственная возможность это сделать – это метод оценок, поскольку в ситуации $f(x, y) \geq C$, $g(x, y) \leq C$ (C – нижняя граница возможных значений $f(x, y)$ и верхняя граница возможных значений $g(x, y)$) он всегда превращает уравнение $f(x, y) = g(x, y)$ в систему вида

$$\begin{cases} f(x, y) = C, \\ g(x, y) = C. \end{cases}$$

Итак попробуем оценить возможные значения выражений в левой и правой частях исходного уравнения.

С правой частью все просто. Поскольку $\sin y \in [-1; 1]$, справедливо двойное неравенство

$$-11.5 \leq 12 + \frac{1}{2} \sin y \leq 12.5, \quad (6.4)$$

причем эти границы нельзя улучшить (они достигаются при некоторых y).

Взаимно обратные положительные числа $\sin^2 x$ и $\frac{1}{\sin^2 x}$, $\cos^2 x$ и $\frac{1}{\cos^2 x}$ приводят к естественному выводу: воспользоваться неравенством для суммы двух взаимно обратных положительных чисел:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} &\geq 2, \\ \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} &\geq 2, \end{aligned}$$

так что выражение в левой части исходного уравнения (обозначим его для краткости буквой F) больше или равно 8. Сопоставляя оценку $F \geq 8$ с *точной* оценкой (6.4) правой части, мы видим, что метод оценок не срабатывает.

Отсюда может быть два вывода:

1. идея применить метод оценок была ошибочной;
2. оценка $F \geq 8$ очень грубая и ее можно уточнить; ясно, что для применения метода оценок нужно иметь неравенство $F \geq 12.5$ (или неравенство $F \geq C$, где $C > 12.5$ – тогда исходное уравнение вообще не имеет решений).

Общие соображения, приведенные в начале решения, показывают, что второй вывод, видимо, более разумный. Действительно, число 8 никак не может быть *точной* нижней границей значений левой части уравнения: если она достигается, то одновременно должны быть выполнены два равенства $\sin^2 x = 1$, $\cos^2 x = 1$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества. Причина этого связана с тем, что выражения $a = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$ и $b = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$ взаимозависимы, а мы их оценивали независимо друг от друга.

Поскольку выражение F имеет вид $a^2 + b^2$, применим для его оценки неравенство о среднем квадратичном и среднем арифметическом:

$$\begin{aligned} F &= a^2 + b^2 = 2 \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right)^2 \geq 2 \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}(a + b)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\sin^2 2x} \right)^2 \geq \frac{25}{2} = 12.5, \end{aligned} \tag{6.5}$$

причем эта нижняя граница возможных значений выражения F является точной, т.к. достигается при некотором значении x из области определения.

Из оценок (6.4) и (6.5) следует, что исходное уравнение равносильно системе (мы используем результат о том, когда в неравенстве о среднем квадратичном и среднем арифметическом достигается знак "-"):

$$\begin{cases} 12 + \frac{1}{2} \sin y = 12.5, \\ \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}, \\ \sin^2 2x = 1. \end{cases}$$

После простых тригонометрических преобразований эта система приводится к виду:

$$\begin{cases} \sin y = 1, \\ \cos 2x = 0, \end{cases}$$

откуда немедленно следует ответ задачи.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi m \right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 26 (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2006, №4) *Решить неравенство*

$$5^{\log_x 2} \cdot \log_2 x + 5^{\log_2 x} \cdot \log_x 2 \leq 10.$$

Решение. Поскольку $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, в задаче четыре раза повторяется один и тот же блок $\log_2 x$. Имея это в виду, введем новую неизвестную $t = \log_2 x$. Для нее неравенство примет вид:

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \leq 10. \quad (6.6)$$

Теперь обратим внимание на наличие взаимно обратных чисел t и $\frac{1}{t}$. Это наводит на мысль оценить левую часть неравенства (6.6) с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Но сделать это можно только, если соответствующие числа – положительные. Поэтому рассмотрим два случая.

1 случай: $t > 0$. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы получим следующую оценку левой части неравенства (6.6) :

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}} \cdot t \cdot 5^t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{5^{t+\frac{1}{t}}} = 2 \cdot 5^{\frac{t+\frac{1}{t}}{2}} \geq 2 \cdot 5^1 = 10.$$

При этом, если хотя бы в одном из двух использованных неравенств о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоял знак $>$, а не $\geq$, то левая часть неравенства (6.6) будет строго больше 10. Поэтому в случае $t > 0$ неравенство (6.6) может выполняться тогда и только тогда, когда в двух использованных неравенствах о среднем арифметическом и среднем геометрическом стоит знак $=$, что, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\begin{cases} 5^{\frac{1}{t}} \cdot t = 5^t \cdot \frac{1}{t} \\ t = \frac{1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

(можно решить второе уравнение с учетом условия $t > 0$ и проверить, что найденное значение $t = 1$ удовлетворяет первому уравнению).

2 случай: $t < 0$. В этом случае левая часть неравенства (6.6) отрицательна, так что это неравенство заведомо выполнено при всех $t < 0$.

Возвращаясь к основной неизвестной x , мы получим, что исходное неравенство распадается на уравнение $\log_2 x = 1$ и неравенство $\log_2 x < 0$, которые решаются без труда:

$$\begin{array}{ll} \log_2 x = 1 & \log_2 x < 0 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ x = 2 & 0 < x < 1 \end{array}$$

Ответ: $x = 2, 0 < x < 1$.

Задача 27 (Олимпиада мех-мат ф-та, 2002, 8 кл., №6) *Существуют ли рациональные числа x, y, u, v , удовлетворяющие уравнению*

$$(x + y\sqrt{2})^2 + (u + v\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2} \quad (6.7)$$

Решение. Допустим, что уравнение (6.7) имеет решение, где x, y, u, v – рациональные числа. Раскрывая скобки в левой части, перепишем уравнение (6.7) в виде:

$$x^2 + 2xy\sqrt{2} + 2y^2 + u^2 + 2uv\sqrt{2} + 2v^2 = 7 + 5\sqrt{2}. \quad (6.8)$$

Из иррациональности числа $\sqrt{2}$ следует, что равенство $a + b\sqrt{2} = 0$, где a и b – рациональные, равносильно равенствам $a = 0, b = 0$. В нашей задаче это означает, что уравнение (6.8) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + u^2 + 2v^2 = 7, \\ 2xy + 2uv = 5. \end{cases} \quad (6.9)$$

Итак, задача решения уравнения (6.7) свелась к решению системы (6.9). Начиная с этого места, рациональность чисел x, y, u, v уже не будет играть никакой роли.

Используя неравенство о среднем арифметическом для неотрицательных чисел x^2 и $2y^2$, u^2 и $2v^2$, оценим выражение в левой части первого равенства системы (6.9):

$$(x^2 + 2y^2) + (u^2 + 2v^2) \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 2y^2} + 2\sqrt{u^2 \cdot 2v^2} = \sqrt{2}(|2xy| + |2uv|) \geq \sqrt{2}(2xy + 2uv).$$

В силу системы (6.9) первое число в этой цепочке равно 7, а последнее равно $5\sqrt{2}$. Таким образом, если система (6.9) имеет решение, то верно неравенство $7 \geq 5\sqrt{2}$. Но это неравенство равносильно (после возведения в квадрат) неравенству $49 \geq 50$, т.е. ложно. Полученное противоречие означает, что система (6.9) несовместна. Поскольку на множестве рациональных чисел эта система и исходное уравнение равносильны, ответ на вопрос задачи отрицательный.

Ответ: нет.

Задача 28 (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2006, №9) *Существуют ли рациональные числа x, y, u, v , удовлетворяющие уравнению*

$$(x + y\sqrt{2})^6 + (u + v\sqrt{2})^6 = 7 + 5\sqrt{2} \quad (6.10)$$

Решение. Выражения $(x+y\sqrt{2})^3$ и $(u+v\sqrt{2})^3$ после раскрытия скобок и приведения подобных могут быть записаны в виде $x' + y'\sqrt{2}$, где $x' = x^3 + 6xy^2$, $y' = 3x^2y + 2y^3$, $u' = u^3 + 6uv^2$, $v' = 3u^2v + 2v^3$. Для чисел x' , y' , u' , v' исходное уравнение примет вид:

$$(x' + y'\sqrt{2})^2 + (u' + v'\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}.$$

Если числа x , y , u , v – рациональные, то и числа x' , y' , u' , v' – рациональные. Таким образом, если уравнение (6.10) имеет решение в рациональных числах, то и уравнение (6.7) имеет решение в рациональных числах, что, как мы установили, неверно.

Ответ: нет.

Глава 7

Применение к исследованию функций на экстремумы

Задача 29 (ВМК, 2004, устный) Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Решение. Дробь, которая задает функцию – неправильная (степень числителя больше степени знаменателя). Делением в столбик числителя этой дроби на знаменатель выделим из дроби "целую" часть:

$$y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Поэтому нашу функцию можно рассматривать как суперпозицию функций $y = t + \frac{1}{t}$ и $t = x^2 + x + 1$. При изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ новая переменная t меняется от $\frac{3}{4}$ до $+\infty$. Поэтому наименьшее значение исходной функции совпадает с наименьшим значением функции $y = t + \frac{1}{t}$ на множестве $\frac{3}{4} \leq t < +\infty$. В силу неравенства для суммы двух взаимно обратных положительных чисел выражение $t + \frac{1}{t}$ больше или равно 2, причем знак равенства достигается при $t = 1$. Поскольку это значение входит в множество $\frac{3}{4} \leq t < +\infty$, 2 и будет искомым наименьшим значением.

Более того, мы можем найти, при каких значениях основной независимой переменной x достигается этот минимум. Для этого нужно решить уравнение $x^2 + x + 1 = 1$, что дает две точки: $x = -1$ и $x = 0$.

Ответ: $y_{\min} = 2$; это значение достигается при $x = -1$ и $x = 0$.

Задача 30 (ВМК, устный, 1998) Найти при $x < 0$ наибольшее значение функции

$$y = 4x + \frac{\pi}{x} - \cos(4x^2).$$

Решение. Функцию $y(x)$ можно рассматривать как сумму двух функций: $g(x) = 4x + \frac{\pi}{x}$ и $h(x) = -\cos(4x^2)$. Первая функция является суммой двух "почти взаимно обратных" чисел. Естественно применить для оценки возможных значений этой функции неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Однако, числа $4x$ и $\frac{\pi}{x}$ — отрицательные, так что непосредственно это сделать нельзя. Поэтому мы применим следующий прием. Запишем $g(x)$ в виде $g(x) = -(4 \cdot (-x) + \frac{\pi}{-x})$. Числа $4 \cdot (-x)$ и $\frac{\pi}{-x}$ — положительные. Поэтому в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$-g(x) \geq 2\sqrt{4 \cdot (-x) \cdot \frac{\pi}{-x}} = 2\sqrt{\pi}.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $4 \cdot (-x) = \frac{\pi}{-x}$, что равносильно $x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (напомним, что $x < 0$). Соответственно, при всех $x < 0$ функция $g(x)$ меньше или равна $g\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ — это наибольшее значение функции $g(x)$ на множестве $x < 0$.

Значения второго слагаемого, $h(x) = -\cos(4x^2)$, не выходят за пределы отрезка $[-1; 1]$. Значение 1 достигается в бесконечном числе точек вида $x = \pm \frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому наибольшее значение функции $h(x)$ на множестве $x < 0$ равно 1.

Вообще говоря, наибольшее значение суммы двух функций, $g(x)$ и $h(x)$, не равно сумме наибольших значений слагаемых. Но если существует точка x_0 , в которой как $g(x)$, так и $h(x)$ достигают наибольшего значения, то в этой же точке достигается наибольшее значение функции $y(x) = g(x) + h(x)$ (и, следовательно, оно равно сумме наибольших значений $g(x)$ и $h(x)$). В нашем случае точка $x_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, в которой достигается наибольшее значение функции $g(x)$, встречается и среди отрицательных чисел $x = -\frac{\sqrt{(2n+1)\pi}}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, в которых достигается наибольшее значение функции $h(x)$ (под номером $n = 0$). Поэтому наибольшее значение $y(x)$ равно $1 - 4\sqrt{\pi}$, причем оно достигается в точке $x_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Рассуждения, проведенные в предыдущем абзаце можно было бы упростить, просто проверив, что в точке $x_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ функция $h(x)$ принимает (максимально возможное для нее) значение 1.

Ответ: $y_{\max} = 1 - 4\sqrt{\pi} = y\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Задача 31 (ВМК, 2004, устный) Найдите наибольшее значение функции

$$y = (1 - x)^5(1 + 2x)^2(1 + x) \quad (7.1)$$

на отрезке $[-0.5; 1]$.

Решение. Данную функцию можно рассматривать как произведение восьми чисел: $a_1 = a_2 = \dots = a_5 \equiv 1 - x$, $a_6 = a_7 = 1 + 2x$, $a_8 = 1 + x$. Если $x \in [-0.5; 1]$, все эти числа неотрицательные. Поэтому к ним можно применить неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\sqrt[8]{a_1 \dots a_8} \leq \frac{a_1 + \dots + a_8}{8}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае сумма $a_1 + \dots + a_8$ равна $5(1 - x) + 2(1 + 2x) + (1 + x) = 8$, это неравенство примет вид:

$$\sqrt[8]{y} \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1.$$

Полученная верхняя граница для возможных значений функции (7.1) будет её наибольшим значением на отрезке $[-0.5; 1]$, если эта верхняя граница достигается при некотором $[-0.5; 1]$.

В использованном неравенстве о среднем арифметическом и среднем геометрическом знак равенства достигается тогда и только тогда числа $a_1, \dots, a_8$ равны между собой:

$$\begin{cases} 1 - x = 1 + 2x, \\ 1 - x = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Поскольку число $x = 0$ действительно лежит на отрезке $[-0.5; 1]$, можно утверждать, что

$$\max_{x \in [-0.5; 1]} y = 1.$$

Ответ: $\max_{x \in [-0.5; 1]} y = 1$; это значение достигается при $x = 0$.

Задача 32 (ВМК, 2004, устный) Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/час составляет $90 + 0.4v^2$ рублей в час. C какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость одного километра пути была наименьшей?

Решение. Один километр пути катер проходит за время $t = \frac{s}{v} = \frac{1}{v}$, что означает расходы в размере $C = (90 + 0.4v^2) \cdot t = \frac{90}{v} + 0.4v$. Величина расходов является суммой двух "почти взаимно обратных" положительных чисел. Применим поэтому неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом: $C \geq 2\sqrt{\frac{90}{v} \cdot 0.4v} = 12$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\frac{90}{v} = 0.4v$, что равносильно $v = 15$. Итак, при всех значениях $v > 0$ величина $C = C(v)$ больше или равна $C(15) = 12$ — это число и будет наименьшим значением функции $C(v)$ на множестве $0 < v < +\infty$.

Ответ: 15 км/час.

Задача 33 (ВМК, олимпиада "Абитуриент-2007", 2007, апрель, №5)
Найти максимальное значение функции

$$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)}.$$

Решение. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном, мы получим:

$$y \leq 2\sqrt{\frac{\sin x + \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)}{2}}.$$

Выражение под радикалом в правой части этого неравенства равно $\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) \cos \frac{5\pi}{12}$ и, в свою очередь, не превосходит $\cos \frac{5\pi}{12}$. Таким образом,

$$y \leq 2\sqrt{\cos \frac{5\pi}{12}},$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда совместна система

$$\begin{cases} \sin x = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right), \\ \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) \sin \frac{5\pi}{12} = 0, \\ \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = 1 \end{cases}$$

Последняя система равносильна уравнению $\sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = 1$, множество решений которого имеет вид: $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ – именно в этих точках достигается наибольшее значение нашей функции. Само наибольшее значение равно

$$\begin{aligned} y_{\max} &= 2\sqrt{\cos \frac{5\pi}{12}} = 2\sqrt{\cos 75^\circ} = 2\sqrt{\cos(45^\circ + 30^\circ)} \\ &= 2\sqrt{\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ} = \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Задача 34 (химический ф-т МГУ, 1978, №3Н) *Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объёмом и вычислить величину этого объёма.*

Решение. Пусть $x > 0$ (см) – длина стороны основания параллелепипеда. Поскольку периметр боковой грани равен 6 (см), высота параллелепипеда равна $3 - x$ (см). Так как высота – положительное число, параметр x должен быть меньше 3. Обратно, если x – произвольное число из интервала $(0; 3)$, существует параллелепипед, удовлетворяющий условию задачи, у которого длина стороны основания равна x .

Теперь мы можем записать объём параллелепипеда (в куб.см.) как функцию $V(x) = x^2(3 - x)$ от параметра x , так что наша задача примет вид:

найти наибольшее значение функции $V(x) = x^2(3 - x)$ на интервале $0 < x < 3$.

Перепишем формулу, которая задаёт $V(x)$, в виде

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{x \cdot x \cdot (6 - 2x)} \right)^3$$

и применим к положительным числам $a_1 = x$, $a_2 = x$, $a_3 = 6 - 2x$ неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$V(x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x + x + 6 - 2x}{3} \right)^3. \quad (7.2)$$

Правая часть неравенства (7.2) не зависит от x и равна 4, т.е. $V(x) \leq 4$. Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда,

когда числа x , x , $6-2x$ равны между собой, т.е. когда $x = 6-2x \Leftrightarrow x = 2$. Поскольку значение $x = 2$ лежит на интервале $0 < x < 3$, искомое наибольшее значение функции $V(x)$ (на интервале $0 < x < 3$) равно 4 и достигается при $x = 2$. Соответственно, искомый параллелепипед с наибольшим объёмом имеет размеры $2 \times 2 \times 3$, а его объём равен 4 (куб.см.).

Как нетрудно видеть, идея решения заключается в преобразовании $V(x)$ в произведение таких положительных сомножителей, что

1. их сумма постоянна;
2. в некоторой точке x_0 эти сомножители совпадают друг с другом;
3. точка x_0 принадлежит соответствующему множеству значений переменных.

В рассмотренном примере сделать такое преобразование было несложно. Следующая задача немного труднее.

Задача 35 (мех-мат ф-т МГУ, 1977, №3Н) Доказать, что для функции $f(x) = \cos x \sin 2x$ справедливо неравенство

$$\min_{x \in [-\pi; \pi]} f(x) > -\frac{7}{9}.$$

Решение. Используя тождества $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, преобразуем формулу, которая задаёт функцию $f(x)$, к виду $f(x) = 2 \sin x (1 - \sin^2 x)$.

В этом виде нашу функцию можно рассматривать как суперпозицию функций $g(z) = 2z(1-z^2)$ и $z(x) = \sin x$. При изменении переменной x от $-\pi$ до $+\pi$ значения переменной $z(x)$ заполняют отрезок $[-1; 1]$. Поэтому наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ совпадает с наименьшим значением функции $g(z) = 2z(1-z^2)$ на отрезке $-1 \leq z \leq 1$. Функция $g(z)$ неотрицательна при $z \in [0; 1]$, неположительна при $z \in [-1; 0]$ и, кроме того, является нечётной. Поэтому её наибольшее значение M достигается в некоторой точке $x_0 > 0$ (не исключено, что таких точек несколько), а наименьшее – в точке $-x_0$; при этом $m = -M$.

Поэтому задача сводится к поиску $M = \max_{z \in [0; 1]} g(z)$ и доказательству того, что $M < \frac{7}{9}$.

Функция $g(z) = 2z(1 - z^2)$ является произведением трёх сомножителей, z , $2 - 2z$, $1 + z$, которые неотрицательны на отрезке $0 \leq z \leq 1$. Поэтому в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$g(z) \leq \left(\frac{z + 2 - 2z + 1 + z}{3} \right)^3 = 1.$$

При этом знак равенства в неравенстве $g(z) \leq 1$ достигается тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два равенства: $z = 2 - 2z$, $z = 1 + z$, что, очевидно, невозможно.

Чтобы найти "правильный" способ разложения $g(z)$ в произведение трёх неотрицательных множителей, воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Пусть a и b – некоторые положительные числа (неопределённые коэффициенты). Запишем $g(z)$ в виде:

$$g(z) = \frac{2}{ab} z(a - az)(b + bz).$$

В силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом, верно неравенство

$$g(z) \leq \frac{2}{ab} \left(\frac{z + a - az + b + bz}{3} \right)^3.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от z тогда и только тогда, когда $1 - a + b = 0$ – это первое условие, которому должны удовлетворять неизвестные (пока) положительные коэффициенты a и b .

В этом случае

$$g(z) \leq \frac{2}{ab} \left(\frac{a + b}{3} \right)^3. \quad (7.3)$$

При этом знак равенства в неравенстве (7.3) достигается тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два равенства: $z = a - az$, $z = b + bz$, т.е. тогда и только тогда, когда $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1-b}$ – это второе условие, которому должны удовлетворять неизвестные положительные коэффициенты a и b .

Система

$$\begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ \frac{a}{1+a} = \frac{b}{1-b}, \end{cases}$$

имеет единственное положительное решение: $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Для этих значений коэффициентов a и b неравенство (7.3) примет вид:

$$g(z) \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}, \quad (7.4)$$

Знак равенства в неравенстве (7.4) достигается тогда и только тогда, когда $z = \frac{a}{1+a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поскольку это значение z лежит на отрезке $[0; 1]$, искомое наибольшее значение M функции $g(z)$ на отрезке $[0; 1]$ равно $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Для завершения решения задачи осталось доказать, что это число меньше, чем $\frac{7}{9}$:

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} < \frac{7}{9} \Leftrightarrow 4\sqrt{3} < 7 \Leftrightarrow 48 < 49.$$

Глава 8

Задачи для самостоятельного решения

Задача 36 (ВМК, 1999, устный) Доказать, что если x_1 , x_2 и x_3 – положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2}.$$

Задача 37 (психологический ф-т, 1974, №4) Доказать, что при всех a и b имеет место неравенство

$$\frac{5^{a+1}}{5^{2a} + 25} \leq 13 - 5b + \frac{1}{2}b^2,$$

и определить, при каких a и b достигается равенство.

Задача 38 (ВМК, 2000+2002+2003, устный) Доказать справедливость неравенства

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2}$$

для любых действительных чисел a , b и c .

Задача 39 (ВМК, 2003, устный) Доказать, что если положительные числа a , b и c таковы, что $a + b + c = 1$, то $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

Задача 40 (ВМК, 1994, устный) Доказать, что для любых 4 положительных чисел a , b , c , d выполняется неравенство

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16.$$

Задача 41 (ВМК, 2004, устный) Пусть a, b, c – положительные числа и $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$. Доказать, что

$$\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4.$$

Задача 42 (ВМК, 1996, устный) Сумма четырех чисел равна 2. Доказать, что сумма их квадратов не меньше 1.

Задача 43 (мех-мат, 1958) Доказать, что если $x^2 + y^2 = 1$, то справедливо неравенство

$$-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}.$$

Задача 44 (ВМК, 2003, устный) Положительные числа a и b таковы, что $a + b \geq 2$. Доказать, что $a^3 + b^3 \geq 2$.

Задача 45 (ВМК, 1998, устный) Доказать, что $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$, если $a + b \geq 1$.

Задача 46 (мех-мат, 1963, №4) Доказать, что при любых положительных a и b и любом натуральном n справедливо неравенство

$$(a+b)^n < 2^n(a^n + b^n).$$

Задача 47 (социологический ф-т, 2004, июль, №5) Три числа, являющиеся длинами ребер прямоугольного параллелепипеда с диагональю b , образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Ответ: $2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$.

Задача 48 (геологический ф-т, 2005, устный) Сравните числа $\sqrt{2006} + \sqrt{2004}$ и $2\sqrt{2005}$.

Ответ: первое число меньше.

Задача 49 (ВМК, устный, 2000+2003) Что больше, $\log_{18} 19$ или $\log_{19} 20$?

Ответ: $\log_{18} 19$.

Задача 50 (ВМК, устный, 2001) Сравнить два числа $\log_3 10 + 4 \lg 3$ и 4.

Ответ: $\log_3 10 + 4 \lg 3 > 4$.

Задача 51 (ВМК, 2003, устный) Доказать, что сумма длин медиан треугольника не менее чем в девять раз превосходит радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Задача 52 (ВМК, 1994, устный) Доказать, что

$$S \leq \frac{a^2 + b^2}{4},$$

где S – площадь треугольника, a и b – любые две его стороны.

Задача 53 (ВМК, устный, 2003) Решить уравнение

$$2^{x^6} + 2^{x^2} = 2^{x^4+1}.$$

Ответ: $\{-1; 0; 1\}$.

Задача 54 (ВМК, устный, 1995) Решить уравнение

$$2^x + 2^{\frac{1}{x}} = 4.$$

Ответ: $x = 1$.

Задача 55 (химический ф-т, 2000, май, №5) Решить уравнение

$$2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 56 (ВМК, 2000, устный) Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_2 = x_1 + \frac{2}{x_1}, \\ 2x_3 = x_2 + \frac{2}{x_2}, \\ \\ 2x_n = x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}, \\ 2x_1 = x_n + \frac{2}{x_n}. \end{array} \right.$$

Ответ: $\{(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \dots; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \dots; -\sqrt{2})\}$.

$$y = 2x + \frac{3\pi}{x} + \sin(x^2).$$

Ответ: $y_{\min} = 2\sqrt{6\pi} - 1 = y\left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)$.

ОТВЕТ: $\frac{8\pi}{3}$.

Ответ: $25\sqrt{3}; \frac{75\sqrt{3}}{4}$.