Методы решения функциональных уравнений

Роман Чепляка

11 декабря 2007 г.

Темы

1 Метод подстановок

Пример 1. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют уравнению

$$f(x+y) = x + yf(x) + (1-x)y. \tag{1}$$

Решение. Пусть f — функция, удовлетворяющая (1). Поскольку (1) выполняется *при всех* значениях переменных x и y, то оно будет выполняться и при конкретных значениях этих переменных. Подставив, например, y равное 0 в исходное уравнение, мы получим $f(x) = x$. Это равенство должно выполняться при любом действительном x.

Таким образом, $(1) \Rightarrow f(x) \equiv x$, или, иными словами, никакая функция кроме $f(x) = x$ не может удовлетворять уравнению (1). Это, тем не менее, не доказывает, что функция $f(x) = x$ *является* решением функционального уравнения (1). Непосредственная проверка показывает, что найденная функция действительно удовлетворяет уравнению при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Чтобы показать необходимость выполнения проверки найденного методом подстановок решения, рассмотрим следующий

Пример 2. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют уравнению

$$f(x+y) = x + yf(x) + (1-\sin x)y. \tag{2}$$

Решение. Точно так же как и в предыдущем примере, устанавливаем, что для функции f, которая удовлетворяет (2), должно выполняться тождество $f(x) \equiv x$. Однако, подставив функцию $f(x) = x$ в (2), мы тождества не получим. Поскольку никакие другие функции также не могут быть решениями (2), то данное уравнение решений не имеет.

Упражнения.

3. $xf(y) + yf(x) + zf(x+y+z) = z^2 + x(y+z) + y(x+z)$.
4. $f(y)\sin x = f(x^2+y) - 7y$.
5. $f(x)\cos y + f(\pi/2 - x)\sin y = \sin(x+y)$.
6. $(x+y)f(x+y) = xf(x) + y^2$.

2 Поиск подстановок

Пример 7. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют уравнению

$$f(x + y^2 + 2y + 1) = y^4 + 4y^3 + 2xy^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + x^2 + x + 1. \quad (3)$$

Решение. Поскольку мы хотим получить выражение $f(x)$, попробуем избавиться от слагаемого $y^2 + 2y + 1$ под знаком функции. Уравнение $y^2 + 2y + 1 = 0$ имеет одно решение $y = -1$. Подставляя $y = -1$ в (3), получаем $f(x) = x^2 - x + 1$. Остается сделать проверку.

Пример 8. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} &f((x^2 + 6x + 6)y) = \\ &\qquad = y^2x^4 + 12y^2x^3 + 48y^2x^2 - 4yx^2 + 72y^2x - 24yx + 36y^2 - 24y. \quad (4) \end{aligned}$$

Решение. Как и в прошлом примере, мы хотим получить под знаком функции свободную переменную (x или y). В данном случае, очевидно, проще получить y. Решив уравнение $(x^2 + 6x + 6)y = y$ относительно x, получаем $x_1 = -1, x_2 = -5$. Подстановка любого из этих значений в (4) дает нам $f(y) = y^2 - 4y$. Проверку сделайте самостоятельно.

Упражнения.

9. $f(x \cos y + y \cos x) = \sin^2 x + \sin^2 y$.
10. $f(x + y^2 - 2y - 3) = y^4 - 4y^3 + 2xy^2 - 3y^2 - 4xy + 14y + x^2 - 7x + 12$.
11. $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x^2 + 2x\sqrt{y} + y) = x + \sqrt{y}$.
12. $f(x^3 + 6x^2 + 11x + y + 6) = x^6 + 12x^5 + 58x^4 + 2yx^3 + 144x^3 + 12yx^2 + 193x^2 + 22yx + 132x + y^2 + 12y + 37$.

3 Использование однозначности функции

Согласно классическому определению функция каждому элементу из области определения ставит в соответствие *единственный* элемент из области значений, т.е. является *однозначной*.

Это свойство можно использовать при решении функциональных уравнений, подбирая подстановки так, чтобы получать одинаковые выражения под знаком функции.

Пример 13. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют уравнению

$$f(x+y) = xy. \tag{5}$$

Решение. Задачу можно переформулировать так: найти такие функции, которые по сумме двух действительных чисел восстанавливают их произведение. Интуитивно ясно, что это невозможно — сумма и произведение двух чисел являются «независимыми», в то время как равенство (5) (если бы искомая функция f существовала) как раз выражало бы такую зависимость.

Действительно, система уравнений

$$\begin{cases} x + y = u, \\ \quad xy = v; \end{cases}$$

имеет решения при любых u и v таких, что $u^2 \geqslant 4v$ (проверьте это!), то есть при заданной сумме u двух чисел их произведение v может принимать бесконечно много значений.

Чтобы быстро и наглядно показать отсутствие решений уравнения (5), достаточно подставить в него две пары чисел x, y с равной суммой и разными произведениями. Например, подстановка $x = 0$, $y = 2$ дает $f(2) = 0$, а подстановка $x = y = 1$ дает $f(2) = 1$. Из полученного противоречия следует, что искомых функций f не существует.

Рассматриваемый прием особенно полезен для исследования функциональных уравнений с одной переменной, т.к. рассмотренные ранее приемы для них не работают.

Пример 14. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяют уравнению

$$f((x+1)^2) = (x-1)^2.$$

Решение. Графиком функции $(x+1)^2$ является парабола с осью $x = -1$. Поэтому в точках, симметричных относительно -1, выражение $(x+1)^2$ будет принимать равные значения. Остается найти две точки, симметричные относительно -1, в которых $(x-1)^2$ принимает *разные* значения[1].

Например, подставляя поочередно $x = 0$ и $x = -2$, получаем $f(1) = 1$ и $f(1) = 9$, откуда следует, что искомой функции f не существует.

Упражнения.

15. $f(x^2 - 4x + 7) = x$.
16. $f(\cos x) = \sin x$.
17. $f(x^2 + xy + y^2) = x + y$.
18. $f(x + 2y) = 2x + y$.

[1]Нетрудно показать, что в любых двух разных точках, симметричных относительно -1, $(x-1)^2$ будет принимать разные значения.

4 Сюръективность и замена переменной

Функция $f\colon A \to B$ называется *сюръективной*, если она принимает все значения из B, т.е. $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon y = f(x)$.

Пример 19. Решить уравнение

$$f(x+1) = x^2 - 1. \tag{6}$$

Решение. Попробуем найти значение функции f в точке $t \in \mathbb{R}$. Для этого найдем такое x, что $x + 1 = t$: $x = t - 1$. Остается подставить $x = t - 1$ в исходное уравнение:

$$f(t) = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t.$$

Это равенство выполняется для всех $t \in \mathbb{R}$ и поэтому искомая функция $f(t) = t^2 - 2t$. Остается сделать проверку. В окончательном результате переменную t можно переименовать в x: $f(x) = x^2 - 2x$.

Этот пример может быть обобщен. Введем обозначения: $\varphi(x) = x+1$, $\psi(x) = x^2 - 1$. Тогда уравнение (6) может быть переписано в виде

$$f(\varphi(x)) = \psi(x), \tag{7}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — некоторые известные функции. Ключевую роль здесь играет сюръективность функции φ. Действительно, если окажется, что функция φ ни при каком $x \in \mathbb{R}$ не принимает значения y, то мы не сможем вычислить $f(y)$ — уравнение (7) не содержит такой информации.

На практике это проявится в том, что уравнение $\varphi(x) = t$, которое мы будем решать, выполняя замену переменной, будет иметь решение не при всех t.

Пример 20. Решить уравнение $f(x^2) = x^{10}$.

Решение. Это уравнение получается из (7) при $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = x^{10}$. Функция $\varphi(x) = x^2$ принимает лишь неотрицательные значения и поэтому не выполняет сюръективного отображения $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Тем не менее, если φ рассматривать как функцию из $\mathbb{R}$ в $[0, +\infty)$, то она будет сюръективна. Для $t \geqslant 0$ замена $t = x^2$ реализуется подстановкой $x = \sqrt{t}$, которая дает $f(t) = t^5$.

Что же делать с $t < 0$? Исходное уравнение не накладывает никаких ограничений на значения f в точках $t < 0$, поэтому их можно задавать произвольным образом. Ответ удобно записать в виде множества: $\{f : f(x) = x^5, t \geqslant 0\}$.

Сделаем проверку. Для любого $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geqslant 0$ и поэтому для любой функции из указанного множества выполняется равенство $f(x^2) = (x^2)^5 = x^{10}$.

Пример 21. Решить уравнение

$$f\left(\frac{x^2}{2}+x\right)=(x+1)^2.$$

Решение. Обозначим $t=\frac{x^2}{2}+x$. Тогда легко заметить, что правая часть выражается через t: $(x+1)^2=2(\frac{x^2}{2}+x)+1=2t+1$. Остается заметить, что когда x пробегает все $\mathbb{R}$, $t=\frac{x^2}{2}+x$ пробегает множество $[-1/2,+\infty)$. Поэтому ответом будет множество функций $\{f: f(x)=2x+1, x\geqslant -1/2\}$. Не забудьте сделать проверку.

Упражнения.

22. $f(7x)=x^2+x+1$.
23. $f(1-2x)=x+1$.
24. $f(1-x^2)=1-x^4$.
25. $f\colon[0,1]\to[0,1], \forall x\in[0,\pi/2]\ f(\sin x)=\cos x$.
26. $f\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty), \forall x\geqslant 0\ f(x^2)=x$.

5 Использование значений функции в некоторых точках

Иногда бывает невозможно найти подстановку, которая бы значительно упрощала вид уравнения. Однако, если зафиксировать одну из свободных переменных, некоторые члены уравнения могут также оказаться фиксированными. Для них можно ввести удобные обозначения и использовать при решении как обычные константы. Если эти константы войдут в ответ, проверка покажет, какие их значения являются допустимыми.

Часто при таком методе решения бывает полезен метод замены переменных.

Пример 27. Решить уравнение $f(x+f(y)) = xy$.

Решение. Подстановка $y = 0$ дает $f(x+f(0)) = 0$. На первый взгляд пользы мало, так как мы не знаем, чему равно $f(0)$. Обозначим $f(0) = c$, тогда получаем $f(x+c) = 0$. Сделав замену переменной $t = x+c$ (подстановка $x = t-c$), получаем $f(t) = 0$, но такая функция очевидно не удовлетворяет исходному уравнению, поэтому решений нет.

Пример 28. Решить уравнение $f(x+f(y)) = x+y$.

Решение. Снова сделаем подстановку $y = 0$ и обозначим $c = f(0)$, получим $f(x+c) = x$. Замена $t = x+c$ дает $f(t) = t-c$. Несмотря на то, что точное значение c нам неизвестно, мы уже знаем, что лишь функции вида $f(x) = x-c$, где $c = \mathrm{const}$, могут удовлетворять уравнению при всех x, y. Чтобы найти c, подставим найденную функцию в исходное уравнение (заодно таким образом сделаем проверку):

$$f(x+f(y)) = f(x+(y-c)) = (x+(y-c)) - c = x+y-2c.$$

Отсюда видим, что равенство $f(x+f(y)) = x+y$ выполняется для всех x, y при c равном 0 и только при нем. Поэтому ответ $f(x) = x$.

Пример 29. Решить уравнение $f(x-f(y)) = x-y$.

Решение. Решая это уравнение аналогично предыдущему, получим $f(x) = x+c$ (проделайте выкладки самостоятельно). Если теперь сделать проверку, окажется, что

$$f(x-f(y)) = f(x-(y+c)) = (x-(y+c)) + c = x-y$$

для всех $x, y, c \in \mathbb{R}$. Поэтому ответом будет семество функций $f(x) = x+c, c \in \mathbb{R}$.

Упражнения.

30. $f(x+y) = f(x) + y$.
31. $f(x+y) = f(x) - y$.
32. $f(x+y) = y - f(x)$.
33. $f(x+y) = f(f(x)) + y$.

6 Использование сюръективности искомой функции

Пример 34. Найти все сюръективные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x+y) = f(x)f(y). \tag{8}$$

Решение. Данное равенство напоминает нам свойство степени $a^{x+y} = a^x a^y$. Поэтому функции вида $f(x) = a^x$ были бы решениями уравнения (8), если отказаться от условия сюръективности.

Покажем, что не существует сюръективных функций, удовлетворяющих уравнению (8). В самом деле, если f сюръективна, то она должна принимать все действительные значения, в том числе значение 0. Обозначим через z такое действительное число, что $f(z) = 0$.

Подставляя $y = z$ в (8), получим $f(x+z) = f(x)f(z) = 0$. Заменяя $x+z$ на t получаем $f(t) = 0, t \in \mathbb{R}$. Однако такая функция сюръективной не является.

Сюръективность искомой функции может быть не задана в условии, но следовать из самого функционального уравнения.

Пример 35. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(xf(y)) = f(x) + y.$$

Решение. При фиксированном x правая часть при разных y принимает все действительные значения. Значит, и левая часть принимает все действительные значения, то есть функция f сюръективна.

Пусть $f(z) = 0$. При $y = z$ $f(xf(y)) = f(0)$, поэтому уравнение принимает вид $f(0) = f(x) + z$, $f(x) = f(0) - z = \mathrm{const}$. Однако очевидно, что никакая константа не может удовлетворять данному уравнению.

Пример 36. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(xf(x) + f(y)) = x + f(y).$$

Решение. Снова видим, что искомая функция сюръективна (при фиксированном y правая часть принимает все действительные значения). При решении этого уравнения мы воспользуемся сюръективностью дважды.

Вначале найдем такое $z \in \mathbb{R}$, что $f(z) = 0$. Подстановка $x = z$ дает $f(f(y)) = z + f(y)$.

Поэтому, заменяя $f(y)$ на t, получаем $f(t) = t + z$. Однако это равенство справедливо лишь для тех t, которые представимы в виде $t = f(y)$ для некоторого $y \in \mathbb{R}$. И снова на помощь приходит сюръективность — поскольку f принимает все значения из $\mathbb{R}$, то каждое $t \in$ можно представить как $t = f(y)$ для некоторого y, а значит равенство $f(t) = t + z$ справедливо при всех $t \in \mathbb{R}$.

Остается сделать проверку и выяснить, при каких постоянных z функция $f(t) = t + z$ будет удовлетворять данному уравнению.

Упражнения.

37. $f(xf(y) + y) = x + f(y)$.
38. $f(f(y)\cos x + x) = \sin x + y$.
39. $f(f(f(x)) + y) = x + f(f(y))$.

7 Уравнения относительно $f(x)$

Пример 40. Найти все $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$(f(x))^2 = 1. \tag{9}$$

Решение. Рассматривая это как уравнение относительно неизвестного $f(x)$, получаем

$$\left[\begin{aligned} &f(x) = 1,\\ &f(x) = -1. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Может показаться, что ответом будут две функции, $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv -1$. Однако, это не так.

Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0;\\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Несложно видеть, что такая функция удовлетворяет уравнению.

Какой же смысл придать совокупности (10)? Поскольку исходное равенство (9) должно выполняться для всех $x \in \mathbb{R}$, то и совокупность (10) также должна выполняться для всех $x \in \mathbb{R}$, то есть для каждого x имеет место одно из равенств. Однако неверным будет предположение, что одно из равенств выполняется сразу для всех x. Как мы увидели на примере, для одних x может выполняться одно из равенств, а для других — другое.

Попробуем охарактеризовать множество функций, задаваемое уравнением (9). Пусть A – множество тех x, для которых выполнено первое равенство. Тогда для всех остальных x должно быть выполнено второе. Мы видим, что множество A однозначно задает функцию f:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A;\\ -1, & x \in \mathbb{R}\backslash A. \end{cases}$$

Остается проверить, что при любом $A \subset \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ функция указанного вида удовлетворяет равенству (9).

Ответ также может быть записан в виде $E(f) = \{\pm 1\}$, где $E(f)$ обозначает множество значений функции f.

Пример 41. Найти все $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$(f(x) + f(y))^2 = (x + y)^2.$$

Решение. Подстановка $x = y = 0$ дает $f(0) = 0$.

Подставим теперь $y = 0$. Получим

$$(f(x))^2 = x^2.$$

Как мы уже знаем, для каждого $x \in \mathbb{R}$ существуют две возможности: $f(x) = x$ или $f(x) = -x$. Однако в данном случае не все функции f с $f(x) = \pm x$ будут решениями.

Именно, докажем, что лишь функции $f(x) \equiv x$ и $f(x) \equiv -x$ удовлетворяют условию.

Если f не совпадает ни с одной из этих функций, то найдутся такие $x, y \neq 0$, что $f(x) = x$, $f(y) = -y$. Тогда, подставив их в исходное уравнение, получим $(x-y)^2 = (x+y)^2$, откуда следует, что $xy = 0$. Получили противоречие.

Остается проверить, что указанные функции удовлетворяют уравнению при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Упражнения.

42. $(f(x))^2 = x^2$.
43. $f(x)^2 - 3f(x) + 2 = 0$.
44. $f(x)^2 = xf(x)$.
45. $(f(x) + f(y))^2 = 1$.

8 Симметрия и цикличность

Напомним, что выражение называется *симметрическим* относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если оно не изменяет свой вид при любых перестановках этих переменных. Выражение называется *циклическим* относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если оно не изменяет свой вид при циклической замене переменных $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, \ldots, x_n \to x_1$.

Пример 46. Найти все $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x-y) + f(y-x) = f(x) - f(y).$$

Решение. Левая часть является симметрической относительно x и y, а правая — нет. Чтобы воспользоваться этим, сделаем замену $x \to y, y \to x$:

$$f(x-y) + f(y-x) = f(y) - f(x).$$

Сравнивая полученное уравнение с исходным, заключаем, что $f(x) - f(y) = f(y) - f(x)$, $f(x) - f(y) \equiv 0$, то есть f является константой. Проверка показывает, что $f(x) \equiv 0$.

Пример 47. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют уравнению

$$f(2x+y) = (f(x))^2 + (f(y))^2.$$

Решение. Замечаем, что правая часть уравнения симметрична, а левая нет. Сделаем замену $x \to y, y \to x$:

$$f(2y+x) = (f(x))^2 + (f(y))^2.$$

Отсюда можно заключить, что f — константа. Действительно, для доказательства того, что $f(a) = f(b)$, достаточно найти такие x, y, что $a = 2x + y, b = 2y + x$. Несложно убедиться, что система уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = a, \\ x + 2y = b; \end{cases}$$

имеет решение при всех $a, b \in \mathbb{R}$.

Пример 48. Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют уравнению

$$\sin(x - y^2) + \sin(y - z^2) + \sin(z - x^2) = f(x) + 2f(y) + 3f(z).$$

Решение. Левая часть циклическая относительно x, y, z. Сделав циклическую замену $x \to y, y \to z, z \to x$, получаем

$$\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)=f(y)+2f(z)+3f(x).$$

Сравнивая полученное равенство с исходным, получаем $f(x)+2f(y)+3f(z)=f(y)+2f(z)+3f(x)$, откуда $f(y)=2f(x)-f(z)$. Теперь достаточно подставить $x=z=0$ и убедиться, что $f(y)=f(0)=\mathrm{const}$. Очевидно, константа не удовлетворяет исходному уравнению, поэтому решений нет.

Упражнения.

49. $f(x^2+y^2)=f(x)+y$.
50. $f(x^5+y^3)=(f(x))^4+(f(y))^4$.
51. $f(xf(y)+yf(z)+zf(x))=x-y+z$.