ГЛАВА 2. ПРЕДЕЛЫ

Основные приёмы, используемые при вычислении пределов.

1. Раскрытие неопределённостей:

а) вынести в числителе и знаменателе множители, порождающие неопределённость и сократить их;

б) применить правило Лопиталя (возможно несколько раз):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

при этом из существования предела отношения производных следует существование предела отношения функций, но не наоборот;

в) использовать замену бесконечно малых и бесконечно больших на эквивалентные. Чаще всего встречаются замены при $x\to 0$:

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\operatorname{tg}x\sim\operatorname{arctg}x;$$

$$x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\sim\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha};$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\quad \log_b(1+x)\sim x\log_b e,\ a^x-1\sim x\ln a.$$

Отметим, что при $x\to x_0$ утверждения «$f(x)\sim g(x)$» и «$g(x)$ есть главная часть $f(x)$» равносильны. Так как функция $f(x)$ имеет бесконечное множество эквивалентных функций, то при постановке задачи выделения главной части $f(x)$ при $x\to x_0$, т.е. нахождении эквивалентной функции, указывается, какой именно вид эта главная часть должна иметь;

г) иногда соотношения эквивалентности могут оказаться недостаточными для определения главной части функции при

$x \to x_0$. В таком случае одним из методов определения главной части является разложение функции в многочлен Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

с остаточным членом в форме Пеано. При этом важно, с одной стороны, не потерять члены нужного порядка, взяв слишком малую степень многочлена Тейлора, а с другой – не выписывать лишних членов, так как это загромождает и затрудняет выкладки. Поэтому при вычислении пределов полезно оценить заранее, какого порядка малости погрешность уже не влияет на предел соответствующего выражения. Мы не приводим здесь табличных разложений элементарных функций, так как они имеются в любом учебнике по математическому анализу.

2. Рекуррентно заданная последовательность

Задача о пределе рекуррентно заданной последовательности

$$a_{n+1} = f(a_n),$$

как правило, сводится к доказательству существования предела, а затем к его вычислению. Для доказательства существования предела чаще всего используются теоремы:

а) если последовательность монотонно убывает (возрастает) и ограничена снизу (сверху), то она имеет предел;

б) если имеются две последовательности b_n и c_n, такие что

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ и $b_n \le a_n \le c_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

в) после того как будет доказано, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ существует, его можно найти из уравнения $a = f(a)$;

г) в рекуррентной последовательности бывает полезна замена $\beta_n = a_n - a$, где a – предполагаемый предел.

3. Другие приёмы:

а) если предел содержит большие суммы или произведения, то можно попробовать их расписать и сокращать. Можно также использовать связь суммы и произведения:

$$\ln \prod_n y_n = \sum_n \ln y_n \,;$$

б) теорема Штольца. Пусть x_n – возрастающая последовательность, $x_n \to \infty$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \,,$$

причём из существования второго предела следует существование первого, но не наоборот;

в) если предел содержит параметр, то надо выяснить, при каких значениях нет неопределённости, а при каких значениях она есть. После этого найти соответствующие пределы;

г) если удаётся «угадать» значение предела (наиболее часто он оказывается равным нулю), то решение сведётся к доказательству того, что это так. Например, чтобы доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, можно рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и доказать, что он сходится, поскольку общий член сходящегося ряда стремится к нулю.

Задачи

2.1. Отметим, что одна из самых распространённых ошибок при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, не являющейся множителем всего этого выражения, на эквивалентную функцию.

Поясним на примере.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2\cos 2x-\sin^2 2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-\cos^2 2x\right)^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^4}{x^4}=4$. Однако если сделать эквивалентные замены при $x\to0$

$2-2\cos 2x\sim 4x^2$ и $\sin^2 2x\sim 4x^2$,

то получим

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2\cos 2x-\sin^2 2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-4x^2}{x^4}=0$, что неверно!

2.2. Вычислить предел функции

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}{\sqrt[3]{x^7}} \quad \text{при } x\to0^+.$$

Решение

Для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ найдём главную часть вида Cx^α для функции $g\left(x\right)=\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ при $x\to0^+$.

Имеем

$$\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}=\left|x\right|^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+1}\ln\left(1-\frac{2x^2}{1+x^2}\right)\sim\left|x\right|^{\frac{1}{3}}\left(-2x^2\right)\sim-2\left|x\right|^{7/3}.$$

Следовательно, главной частью $g\left(x\right)$ при $x\to0^+$ является функция $-2\left|x\right|^{7/3}$. Тогда искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\,\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}{\sqrt[3]{x^7}}=\frac{-2|x|^{7/3}}{x^{7/3}}=-2\,.$$

Заметим, что левостороннего предела $f(x)$ $\left(x\to 0^-\right)$ не существует.

2.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)x^3 \text{ при } x\to+\infty\,.$$

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\dfrac{1}{x}\right)=0$, то имеем неопределённость $(0\cdot\infty)$. При $x\to+\infty$

$$\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)\sim\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{1+x\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\frac{1}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}\sim\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{x\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}\sim\frac{1}{2x^3}\,.$$

Итак, главной частью функции $\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\dfrac{1}{x}\right)$ является функция $1/2x^3$, а искомый предел равен

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)x^3=\frac{1}{2x^3}\,x^3=\frac{1}{2}\,.$$

2.4. Вычислить предел функции

$$f(x)=\frac{\sin x-\ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}\right)}{x^5} \text{ при } x\to 0\,.$$

Решение

Найдём главную часть вида $C|x|^{\alpha}$ функции

$$g(x)=\sin x-\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right) \text{ при } x\to 0.$$

Воспользовавшись разложением функций $\sin x$ и $\ln(1+x)$ в многочлены Тейлора, пишем последовательно многочлены Тейлора функции $g(x)$ в нулевой точке увеличивающегося порядка, пока не получим многочлен, отличный от нуля.

Для первого порядка имеем

$$g(x)=\sin x-\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)=\left(x+o(x)\right)-\left(x+o(x)\right)=o(x)$$

при $x\to 0$, то есть $g_1(x)\equiv 0$. Для второго порядка

$$g(x)=\left(x+o\left(x^2\right)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)=o\left(x^2\right),$$

то есть $g_2(x)\equiv 0$. Для третьего порядка

$$g(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^2\right)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3\right)+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^2\right)\right)=o\left(x^3\right),$$

то есть $g_3(x)\equiv 0$. Для четвертого порядка

$$g(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{3x^4}{2}\right)-\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)\right)=o\left(x^4\right),$$

то есть $g_4(x)\equiv 0$. Для пятого порядка

$$g(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{3x^4}{2}+\frac{3x^5}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(x^4+2x^5\right)+\frac{1}{5}x^5+o\left(x^5\right)\right)==-\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right),$$

то есть $g_5(x)=-\frac{1}{15}x^5$, и данная степенная функция есть главная часть функции $g(x)=\sin x-\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)$ при $x\to 0$.

Таким образом, искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)}{x^5}=-\frac{1}{15}.$$

2.5. Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана как $a_1=1$ $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1,\ \forall n\in N$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Решение

Выясним, существует ли $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Методом математической индукции проверяем, что для любого n справедливо $a_n<2$. Отсюда следует, что $a_{n+1}-a_n=1-a_n/2>0$. Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ имеет предел.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1$, получаем $A=A/2+1$, откуда $A=2$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

2.6. Пусть $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}_{n}$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решение

Очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ возрастающая. Для того чтобы существовал её предел, достаточно доказать, что она ограничена сверху. Заменив в последнем корне «2» на «4», тем самым увеличив a_n, получим, что для любого n выполняется $a_n < 2$. Итак, искомый предел существует. Обозначим его A. Для его определения перейдём к пределу в рекуррентном соотношении $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, имеем $A = \sqrt{2+A}$, откуда $A = 2$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2.7. Пусть $a_n = (-1)^n$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решение

Так как $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = -1$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} = -1$, отсюда следует, что данная последовательность предела не имеет. Члены её удовлетворяют рекуррентному соотношению $a_n = -a_{n-1}$. Если формально перейти к пределу в этом соотношении, то получим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Этот пример показывает, что возможность перехода в рекуррентном соотношении к пределу должна быть обоснована, т.е. существование предела должно быть установлено заранее.

2.8. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{n^2+k^2}$.

Решение

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

Осуществляя предельный переход, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

2.9. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}$.

Решение

Аналогично задаче **2.8** искомый предел равен

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

2.10. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$.

Решение

Обозначим $y_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$.

Очевидно, что

$$\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}=\ln\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

есть интегральная сумма для

$$\int_0^2 \ln x dx = \left(x\ln x - x\right)\Big|_0^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^{2\ln 2-1} = \dfrac{4}{e}$.

2.11. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n}}{10^n}$.

Решение

Очевидно, что

$$1+11+111+..+\underset{n}{111..1} = n+10\left(n-1\right)+10^2\left(n-2\right)+..+10^n =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n}}{10^n} = \frac{10}{81}.$$

2.12. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-1}{\left(2x\right)^x-1}$.

Решение

Используем правило Лопиталя:

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln 2x = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^x-1}{(2x)^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln x}-1}{e^{x\ln 2x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln x}{x\ln 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln 2+\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

2.13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x}{\sin \pi x}$.

Решение

Используя правило Лопиталя, имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\sin \pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(e^{x\ln x}-1\right)'}{\left(\sin \pi x\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x\left(\ln x+1\right)}{\pi\cos \pi x}=$$

$$=\lim_{x\to a} f(x)= f(a)=\frac{1}{\pi}\frac{0+1}{\cos \pi}=-\frac{1}{\pi}.$$

2.14. Вычислить $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x^6}\int\limits_1^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt$.

Решение

Сделав замену $x^2=y, y\to\infty$ при $x\to\infty$, получим:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x^6}\int\limits_1^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt=\lim_{y\to \infty}\frac{1}{y^3}\int\limits_1^{y}\sqrt{1+t^4}\,dt.$$

Рассмотрим функцию $F(y)=\int\limits_1^{y}\sqrt{1+t^4}\,dt$. Так как $\lim\limits_{y\to\infty}F(y)=\infty$ и $\lim\limits_{y\to\infty}y^3=\infty$, то имеем неопределенность.

Можем воспользоваться правилом Лопиталя:

$$\lim_{y\to\infty}\frac{F(y)}{y^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{y\to\infty}\frac{F'(y)}{\left(y^3\right)'}.$$

В результате получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^6}\int_1^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^3}\int_1^{y}\sqrt{1+t^4}\,dt=\lim_{y\to\infty}\frac{F'(y)}{\left(y^3\right)'}=\lim_{y\to\infty}\frac{\sqrt{1+y^4}}{3y^2}=\frac{1}{3}.$$

Можно поступить и следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^6}\int_1^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(F(x^2)-F(1)\right)'}{\left(x^6\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\left(x^2\right)^4}\cdot 2x}{6x^5}=\frac{1}{3}.$$

Здесь использованы формула производной сложной функции $\left(f(u)\right)'_x=f'(u)\cdot u'_x$ и правило Лопиталя.

2.15. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)$.

Решение

Так как $e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, то

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=\lim_{n\to\infty}n\sin\left(2\pi n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right).$$

Выражение $n!\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ представим в виде суммы целой части $n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n!}$ и $n!\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$. В силу периодичности синуса получаем $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\left(2\pi n!\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)=\left|2\pi n!\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\to 0\right|=$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(2\pi n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)=2\pi\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}+n\cdot n!\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)=2\pi.$$

2.16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{(2013)}$.

Решение

Так как $\cos 2x = 1 - \dfrac{2^2 x^2}{2!} + \dfrac{2^4 x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$, то

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1-\cos 2x}{2x^2} = \frac{1}{2x^2}\left(1 - 1 + \frac{2^2 x^2}{2!} - \frac{2^4 x^4}{4!} - \ldots - \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} - \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} x^{2k-2}}{(2k)!}.$$

Вычислим производную $2k+1$- ого порядка

$$\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{(2k+1)} = -\frac{2^{2k+3}(2k+2)!}{1!(2k+4)!}x + \frac{2^{2k+4}(2k+3)!}{2!(2k+5)!}x^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{2^{2k+i+2} x^i}{(2k+i+2)(2k+i+3)i!}.$$

Видно, что любая нечетная производная $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ при $x=0$ принимает нулевое значение.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{(2013)} = 0$.

2.17. Дана матрица $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{n} & \frac{6}{n} \\ \frac{3}{n} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^n$.

Решение

Представим $A_n = E + B_n$, где E – единичная матрица,

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{n} & \frac{6}{n} \\ \frac{3}{n} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{n^2} & \frac{18}{n^2} \\ 0 & -\frac{2}{n^2} & -\frac{6}{n^2} \end{pmatrix}.$$ Тогда $B_n^3 = 0$.

По формуле бинома получаем $A_n^n = \left(E + B_n\right)^n = E + nB_n + \frac{n(n-1)}{2} B_n^2$.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} nB_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2} B_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$ значит,

$$\lim_{n\to\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.18. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Решение

Обозначим $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, тогда

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\ln n! - \frac{1}{n} n \ln n = \frac{1}{n}(\ln 1 - \ln n + \ln 2 - \ln n + \ldots + \ln n - \ln n) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n}.$$

Получилась интегральная сумма функции $\ln x$ на отрезке $[0;1]$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \int\limits_0^1 \ln x dx = (x\ln x - x)|_0^1 = -1$.

Тогда $\ln \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$.

2.19. Доказать, что последовательность $\frac{1}{2}, 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}, \ldots$ имеет предел, и найти этот предел.

Решение

Если предел A существует, то он удовлетворяет отношению $A=1+ 1/A$, откуда $A=1+\sqrt{2}$. Обозначим n-й член рассматриваемой последовательности $1+\sqrt{2}+\delta_n$. Тогда

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n\left(1-\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}+\delta_n}$$

и при $|\delta_n|<1$ имеем

$$|\delta_{n+1}| \le |\delta_n| \left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{1}{2}|\delta_n| .$$

Но $\delta_1 = 1-\sqrt{2}$, $|\delta_1| < 1/2$, так что $|\delta_n| \le 1/2^n$ и $|\delta_n| \to 0$ при $n\to\infty$, откуда и вытекает, что предел действительно существует и равен $1+\sqrt{2}$.

2.20. Рассмотрим отрезок AB. Последовательность точек $\{M_n\}$ строится следующим образом: $M_1 = A$ $M_2 = B$, каждая точка M_{n+1} является серединой отрезка, соединяющего точки

M_{n-1} и M_n. К какой точке отрезка AB стремится последовательность $\{M_n\}$?

Решение

Индукцией по n легко проверить, что точка M_n отстоит от точки $M_1 = A$ на $\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ длины отрезка AB (обозначим ее l). Таким образом, $\{M_n\}$ стремится к точке C отрезка AB, отстоящей от $M_1 = A$ на $\frac{2}{3}l$.

2.21. Последовательность $\{x_n\}$ определяется следующим образом: $x_1 \in [0,1]$; если $n \geq 2$, то $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1}$ при четном n и $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1}+1)$ при нечетном n. Сколько предельных точек может быть у этой последовательности?

Решение

Имеем $\left|x_{2n}-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2}\left|x_{2n-1}-\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{x_{2n-2}+1}{2}-\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{4}\left|x_{2n-2}-\frac{1}{3}\right|$, так что $\{x_{2n}\} \to 1/3$ и $\{x_{2n-1}\} \to 2/3$, т.е. данная последовательность имеет две предельные точки: $1/3$ и $2/3$.

2.22. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2^3-1}{2^3+1}\frac{3^3-1}{3^3+1}....\frac{n^3-1}{n^3+1}\right]$.

Решение

Имеем

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\left(k^2+k+1\right)}{(k+1)\left(k^2-k+1\right)}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}\prod_{k=2}^{n}\frac{\left(k^2+k+1\right)}{\left(k^2-k+1\right)}=$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\prod_{k=2}^{n}\frac{\left(k^2+k+1\right)}{\left(k^2-k+1\right)}.$$

Но $(k+1)^2-(k-1)+1=k^2+k+1$, так что, сокращая одинаковые сомножители в числителе и знаменателе, последнее произведение преобразуем к виду

$$\frac{2}{n(n+1)}\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}=\frac{2}{3\left(n^2+n\right)}\to\frac{2}{3}\ .$$

2.23. Числовая последовательность задана соотношением $u_1=b$, $u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$. При каких значениях a и b последовательность $\{u_n\}$ сходится? Чему равен предел?

Решение

Имеем $u_{n+1}=u_n+(u_n-a)^2$, откуда $u_{n+1}\ge u_n$. Если предел A существует, то $A=A+(A-a)^2$ и $A=a$. Поэтому как только для некоторого i будет выполняться соотношение $u_i\ge a$, то все u_j при $j>i$ тоже больше a и предел не существует. Квадратный трехчлен $u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$ не превосходит a при $a-1\le u_n\le a$, получаем, что $u_{n+1}\ge u_n\ge a-1$ и $u_n=u_n+(u_n-a)^2\le u_n+(a-u_n)=a$. Поэтому при $a-1\le b\le a$ последовательность ограничена сверху и имеет пределом число a.

2.24. Доказать, что предел последовательности

$$x_{n+1}=\frac{x_n\left(x_n^2+3a\right)}{3x_n^2+a}\qquad x_0>0,\ a>0$$

существует, и найти его.

Решение

Если предел A существует, то $A=\frac{A\left(A^2+3a\right)}{3A^2+a}$, откуда $A=\sqrt{a}$. Пусть $x_0^2<a$, и уже доказано, что $x_n^2<a$, тогда $\frac{x_n^2+3a}{3x_n^2+a}>1$, т.е. $x_{n+1}>x_n$.

Имеем

$$x_{n+1}^2=x_n^2\left[\frac{x_n^2+3a}{3x_n^2+a}\right]^2=\varphi\left(x_n^2\right),\text{ где }\varphi(z)=z\left[\frac{z+3a}{3z+a}\right]^2.$$

Но $\varphi'(z)=3\frac{z+3a}{3z+a}\left[\frac{z-a}{3z+a}\right]^2>0$ при $z\neq a$, $a>z>0$, так что $r_{n+1}^2=\varphi\left(x_n^2\right)<\varphi(a)=a$.

Таким образом, при $x_0^2<a$ последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и сходится к $A=\sqrt{a}$. Аналогично устанавливается, что при $x_0^2>a$ последовательность монотонно убывает и сходится к тому же пределу. При $x_0^2=a$ существование предела очевидно.

2.25. Пусть $a_1=1$, $a_k=k\left(a_{k-1}+1\right)$.

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)$.

Решение

Легко заметить, что $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k+1}{n!}\right)$. Индукцией по n: $a_n = n + n(n-1) + \ldots + n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2 + n!$, так что искомый предел равен

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e\ .$$

2.26. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такая, что $1/2 < a_n < 1$ при $n \ge 0$. Определим последовательность $\{x_n\}$ как

$$x_0 = a_0\ ,\ \ x_{n+1} = \frac{a_{n+1}+x_0}{1+a_{n+1}x_n}\ .$$

Какие возможные значения могут быть для $\lim_{n\to\infty} x_n$?

Решение

Первый способ

Докажем по индукции, что $0 < 1 - x_n < \frac{1}{2^{n+1}}$.

При $n = 0$ справедливо, так как $\frac{1}{2} < x_0 = a_0 < 1$.

Пусть неравенство верно для n, тогда из рекуррентного соотношения получаем

$$1 - x_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1}+x_n}{1+a_{n+1}x_n} = \frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}x_n}\left(1-x_n\right).$$

Так как

$$0 < \frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}x_n} < \frac{1-\frac{1}{2}}{1+0} = \frac{1}{2}\ ,$$

получаем

$$0 < 1 - x_{n+1} < \frac{1}{2}\left(1 - x_n\right) < \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Второй способ

Как известно, $\operatorname{th}\left(u+v\right) = \dfrac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}$. Пусть $u_n = \operatorname{arth} a_n$, тогда

$x_n = \operatorname{th}\left(u_0 + u_1 + \ldots + u_n\right)$. Далее $u_0 + u_1 + \ldots + u_n > \left(n+1\right)\operatorname{arth}\dfrac{1}{2}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{u\to\infty} \operatorname{th} u = 1$.