Аналитическая геометрия

1.62. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения каждых двух окружностей проведена прямая. Доказать, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

Решение

Каждую окружность "накрываем" параболоидом вида $z = R_i^2 - (x - x_i)^2 - (y - y_i)^2$. Каждая пара параболоидов пересекается по параболе, проекция которой на плоскость Oxy дает соответствующую прямую. Но такая парабола либо пересекает третий параболоид в единственной точке, либо не пересекает.

1.63 Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие – на кривой: 1) $y = x - x^2$;

2) $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,(a > b)$. Найти площадь квадрата.

Решение

Указание: пусть $x_1, x_2 (x_2 > x_1)$ абсциссы вершины квадрата, тогда $x_2 - x_1 = |y(x_1)| = = |y(x_2)|$.

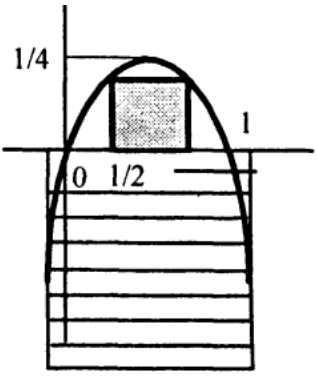

Рис. 1

1) рассмотреть оба случая: $x_1 x_2 > 0$ и $x_1 < 0$, $x_2 > 0$.

В соответствии с указанием имеем $(x_2 > x_1) x_2 - x_1 = |y(x_1)| = |y(x_2)|$, поэтому рассмотрим случаи:

а) $y(x_k) > 0$, $k = 1, 2$, и

б) $y(x_k) < 0$, $k = 1, 2$ (см. рис. 1).

В случае "а" $\begin{cases} x_2 - x_1 = x_1 - x_1^2, \\ x_2 - x_1 = x_2 - x_2^2, \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = x_1^2 - x_2^2 =$

$= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$. Поэтому $x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = (3 \pm \sqrt{5})/2$, но только $x_1 = (3 - \sqrt{5})/2 < 1$. Тогда: $x_2 = 1 - x_1 = (\sqrt{5} - 1)/2$ и $S_1 = (x_2 - x_1)^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

В случае "б" $x_2 - x_1 = -y(x_1) = x_1^2 - x_1 = x_2^2 - x_2 = -y(x_2)$ и по–прежнему $x_1 + x_2 = 1$. Тогда $x_1^2 = x_2 = 1 - x_1 \Rightarrow x_1^2 + x_2 - 1 = 0$, $x_1 = -(1 + \sqrt{5})/2 < 0$, $x_2 = 1 + (1 + \sqrt{5})/2 = (3 + \sqrt{5})/2 > 1$. Поэтому $x_2 - x_1 = (3 + \sqrt{5})/2 + (1 + \sqrt{5})/2 = 2 + \sqrt{5}$;
$S = (x_2 - x_1)^2 = (2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$; 2) $S = 4a^2b^2/(4a^2 + b^2)$.

1.64. Доказать, что при любом натуральном n существует сечение n-мерного куба $\{x \in \mathbb{R}^n \,\|x_k| \le 1, k = 1, \dots, n\}$ двумерной плоскостью, являющееся правильным $2n$-угольником.

Решение

Проведем через начало координат в $\mathbb{R}^n$ плоскость, порожденную векторами a и b. Она пересекает куб по множеству $\{\alpha a + \beta b \,\|\alpha a_k + \beta b_k| \le 1, k = 1, \dots, n\}$. Векторы a и b достаточно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $\|a\| = \|b\|$ и $(a, b) = 0$;

2) на двумерной плоскости с координатами (α, β) неравенства $|\alpha a_k + \beta b_k| \le 1, k = 1, \dots, n,$ задают правильный $2n$–угольник.

Оба свойства выполняются, например, при $a_k = \sin\dfrac{k\pi}{n}, b_k = \cos\dfrac{k\pi}{n} : (a, b) = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin\dfrac{2k\pi}{n} = 0,$

$$\|a\|^2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2},$$

$$\|b\|^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}.$$

1.65. Точка $A(1;-1)$ – вершина равнобедренного треугольника ΔABC, прямая $2x+y=0$ служит его основанием BC, а точка $M(0;-3)$ лежит на стороне AB. Составить уравнение окружности, вписанной в ΔABC.

Решение

Пусть ΔABC – равнобедренный $(AB=AC)$, (BC): $y+2x=0$ и $A(1;-1)$; $M(0;-3)\in(AB)$ (см. рис. 2).

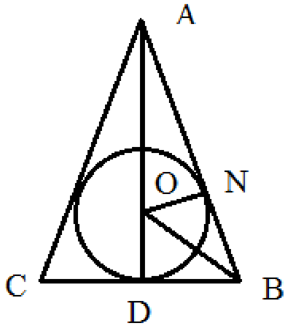

Рис. 2

Центр O вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов ΔABC. Но AD является высотой, медианой и биссектрисой, поэтому точка O лежит на пересечении (AD) и (OB), причем $O\in(AD)$. Составим уравнение (AD) и (AB). Имеем: (AB) совпадает с (AM), поэтому $(AB): \dfrac{x-1}{0-1} = \dfrac{y+1}{-3+1} \Rightarrow 2x-y-3=0$;

$(AD)\perp(BC) \Rightarrow (AD): \dfrac{x-1}{2} = = \dfrac{y+1}{1} \Rightarrow x-2y-3=0$ [направляющим вектором (AD) можно взять вектор нормали (CB) $\vec{n}(2;1)$]. Пусть N и D – точки касания сторон AB и CD к окружности, поэтому:

$$\begin{cases}|OD| = |ON| \\ O(x_0, y_0) \in (AD)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|2x_0 + y_0| / \sqrt{5} = |2x_0 - y_0 - 3| / \sqrt{5} \\ x_0 - 2y_0 - 3 = 0\end{cases} \Rightarrow$$

а) $\begin{cases}2x_0 - y_0 - 3 = 2x_0 + y_0 \\ x_0 - 2y_0 - 3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y_0 = -3/2 \\ x_0 = 0\end{matrix};$

б) $\begin{cases}2x_0 - y_0 - 3 = -2x_0 - y_0 \\ x_0 - 2y_0 - 3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_0 = 3/4 \\ y_0 = -9/8\end{matrix}.$

Итак, $O_1(0;3/2)$, $O_2(3/4;-9/8)$. Точки A и O должны лежать по одну сторону от (CB), поэтому проверим знаки левой части уравнения (CB) при $O = O_1$ и $O = O_2$. Имеем в точке $A(1;-1): 2x + y = 0, 2\times 1 - 1 > 0$, в точке $O_1 : -3/2 < 0$; $O_2 : 2\times 3/4 - 9/8 > 0$. Поэтому $O_2(3/4;-9/8)$ – центр вписанной окружности, ее радиус $r = |2\times(3/4) - 9/8| / \sqrt{5}$. Следовательно, $(x - 3/4)^2 + +(y + 9/8)^2 = 9/320$ – уравнение искомой окружности.

1.66. Пусть B – центрально симметричное выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^2$. Доказать, что найдется такой параллелограмм, содержащий B, что середины сторон параллелограмма будут являться точками множества B.

Решение

Лемма. Пусть векторы a, b не параллельны. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in B_\varepsilon(a), \forall y \in B_\varepsilon(b)$, векторы x и y не параллельны.

Доказательство. Допустим противное: $\forall k \quad \exists x_k \in B_{1/k}(a)$ и $\exists y_k \in B_{1/k}(b) : x_k$ и y_k параллельны. Так как $a, b \neq 0$, то $x_k, y_k \neq 0$ (для достаточно больших номеров k) и $\lambda_k x_k + y_k \neq 0$ для $\lambda_k = \pm \|y_k\| / \|x_k\|$ (для одного из знаков). В силу сходимости

$x_k \to a, y_k \to b$ получаем в пределе $\lambda a + b = 0,$ где $\lambda = \lim \lambda_k = \pm\|b\|/\|a\|.$ Противоречие.

Пусть P_k – последовательность параллелограммов с вершинами $\left\{x_k^i\right\}_{i=1}^4$ таких, что $B \subset P_k$ для всех k и

$$\lim S(P_k) = S = \inf\left\{S(P) \middle| P \text{ – параллелограмм } B \subset P\right\}. \quad (*)$$

Поскольку $\{P_k\}$ ограничена, то можем считать $\lim x_k^i = x^i, 1 \le i \le 4.$. В силу леммы точки $\left\{x_k^i\right\}_{i=1}^4$ являются вершинами параллелограмма P, на котором в силу непрерывности площади достигается значение S в (*). Покажем, что середины сторон P являются точками из B.

Допустим противное. Пусть O – центр симметрии

B и (P), $y = \frac{1}{2}(x^1 + x^2).$

Пусть $\left[x^1, x^2\right] \cap B = [a,b]$ (в силу выпуклости B) и $y \notin [a,b]$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : [a,b] \cap B_\varepsilon(y) = \varnothing$.

Пусть $[a,b] \subset \left[x^1, y\right], y_\varepsilon = y + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x^1 - x^2}{\left\|x^1 - x^2\right\|}.$

Из–за выпуклости B выполнено $\left[y_\varepsilon, x^2\right] \cap B = \varnothing$, поэтому (в силу компактности множеств в последнем равенстве) $\exists \delta > 0 : \delta -$ окрестность $\left[y_\varepsilon, x^2\right]$ не пересекает B .

Пусть $z = x^2 + \frac{\delta}{2}\frac{x^3 - x^2}{\left\|x^3 - x^2\right\|}.$ По построению $\left[y_\varepsilon, z\right] \cap B = \varnothing.$

Пусть ω – пересечение прямой $aff\left\{y_\varepsilon, z\right\}$ с прямой $aff\left\{x^1, x^4\right\}.$

Пусть ω' *и* z' – точки, симметричные точкам ω и z относительно точки O. Так как площадь треугольника $\omega x^1 y_\varepsilon$

строго меньше площади треугольника zx^2y_ε, то параллелограмм $\omega z\omega' z'$ содержит B (в силу центральной симметрии) и имеет площадь, меньшую чем P.

Замечание. Из этой задачи следует, что если за единичный шар на плоскости взять множество B, то его периметр будет не более 8.

1.67. Прямая (ℓ) скользит по прямым $(\ell_1): x=0, y=0$ и $(\ell_2): x=1, z=0$ и остается параллельной плоскости $(\alpha): x+y+z=0$. Найти поверхность, образованную движением прямой (ℓ).

Решение

Запишем уравнение прямых (ℓ_1) и (ℓ_2) в параметрическом виде $(\ell_1): \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=\lambda_1, \end{cases}$ $(\ell_2): \begin{cases} x=1, \\ y=\lambda_2, \\ z=0 \end{cases}$ и запишем уравнение прямой $(\ell): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{\lambda_2}=\dfrac{z-\lambda_1}{-\lambda_1}$, $\lambda_k \in R, k=1,2$. По условию прямая (ℓ) параллельна плоскости $(\alpha): x+y+z=0$, т.е. $1+\lambda_2-\lambda_1=0$ [условие параллельности (ℓ) и (α)]. Выразим теперь x,y,z из уравнения (ℓ) через λ_1,λ_2 и исключим эти параметры. Имеем $y=\lambda_2 x, z=\lambda_1(1-x)=(1+\lambda_2)(1-x)$. Заменяя λ_2 на $\lambda_2=-y/x$, получаем $z=(1+y/x)(1-x)$ или $x^2+xy+xz-x-y=0$ – это и есть искомое уравнение поверхности.

1.68. Пусть a,b,c – расстояния между тремя точками целочисленной решетки, лежащими на окружности радиусом R. Доказать, что $abc \ge 2R$.

Решение

Пусть S – площадь треугольника с вершинами в узлах решетки, тогда $S \geq \frac{1}{2}$ [так как $S = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$, где (x_i, y_i) – координаты двух вершин относительно третьей]. В то же время $S = \frac{abc}{4R}$.

1.69. Найти объем сечения четырехмерного куба $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| 0 \leq x_k \leq 1, k \in \overline{1,4}\right\}$ гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

Решение

Точки пересечения секущей плоскости с координатными осями образуют правильный тетраэдр с ребром $2\sqrt{2}$. Плоскости $x_k = 1$ отсекают от него четыре правильных тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$. Так как объем правильного тетраэдра с ребром a равен $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, то объем сечения равен $\frac{\sqrt{2}}{12}(2\sqrt{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{2})^2 = \frac{4}{3}$.

1.70. Дана вершина $(3;5)$ равнобедренного треугольника, уравнение его основания $\mathrm{x} - 2\mathrm{y} + 12 = 0$ и его площадь $\mathrm{S} = 15$. Составить уравнения боковых сторон.

Решение

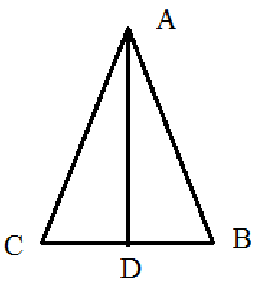

Рис. 3

Рассмотрим ΔABC, где $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$, $\mathrm{A}(3,5)$, уравнение $(\mathrm{CB}): \mathrm{x} - 2\mathrm{y} + 12 = 0$, $\mathrm{S}_{\Delta} = 15$ и AD – высота. Составим уравнение (AD).

Так как нормаль к (CB) $\vec{n}(1;2)$ является направляющим вектором (AD), то получаем $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}\Rightarrow 2x+y-11=0$.

Координаты точки D находим из системы уравнений $\begin{cases}2x+y-11=0\\ x-2y+12=0\end{cases}\Rightarrow D(2;7)$.

Пусть x, y координаты вершины $B(x,y)$, тогда $S_{\Delta ABC}=15/2=\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{K}(11-y-2x)\right|/2\Rightarrow 2x+y-11=\pm 15$.

Найдем координаты точек B и C, решая систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x+y=26\\ x-2y=-12\end{cases}\Rightarrow B_1(8;10)$; б) $\begin{cases}2x+y=-4\\ x-2y=-12\end{cases}\Rightarrow B_2(-4;4)$.

B_1 примем за B, B_2 – за C. Тогда $(AB):\frac{x-3}{5}=\frac{y-5}{5}\Rightarrow$ $\Rightarrow x-y+2=0$; $(AC):\frac{x-3}{-7}=\frac{y-5}{-1}\Rightarrow x-7y+32=0$.

1.71. Доказать, что единичный квадрат можно разрезать на N квадратов меньшего размера, если N достаточно велико.

Решение

Очевидно, квадрат можно разрезать на k^2 квадратов меньшего размера, $k\ge 2$. Это число можно увеличить до $k^2+p(m^2-1)+q(n^2-1)$, где m,n,p,q – любые натуральные числа. Если натуральные числа a,b – взаимно простые, то любое целое число c можно представить в виде $c=ax+by\left(x,y\in\mathbb{Z}\right)$. При этом, если натуральное c достаточно велико, то найдутся неотрицательные решения. Действительно, $\{0,a,\ldots,(b-1)a\}$ – полная система вычетов по модулю b. Следовательно, $ax\equiv c(\mathrm{mod}\,b)$ при некотором $x\in\{0,1,\,,b-1\}$. Если $c\ge(b-1)a$, то число $y = \dfrac{c - ax}{b}$ является неотрицательным. Взяв $m = 2, n = 3,$ получаем пару взаимно простых чисел $a = m^2 - 1 = 3$ и $b = n^2 - 1 = 8$. Существование разбиения вида $N = k^2 + 3p + 8q$ для достаточно большого N следует из приведенного выше рассуждения.

1.72. Отрезок $[AB]$ длиной 3 скользит своими концами по координатным осям (A – по Oy , B – по Ox). Какую траекторию описывает точка C , находящаяся на отрезке на расстоянии 1 от вершины A ?

Решение

Пусть точки A и B имеют координаты $A(0;y)$, $B(x;0)$, точка $C(x_c, y_c) \in [AB]$ и отстоит от A на расстоянии 1 (см. рис. 4). Точка C делит $[AB]$ в отношении $\lambda = |AC| / |CB| = 1/2$, поэтому

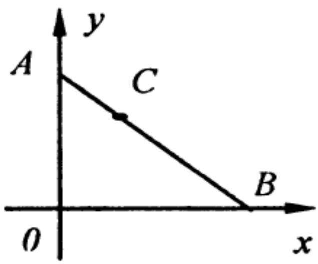

Рис. 4

$$x_c = \frac{x_A + \lambda \times x_C}{1+\lambda} = \frac{0 + x/2}{1 + 1/2} = x/3;$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda \times y_C}{1+\lambda} = \frac{y + x/2}{1 + 1/2} = 2y/3.$$

По условию $|AB| = 3$, поэтому $|AB|^2 = x^2 + y^2 = 9$. Подставляя в последнее равенство $x = 3x_c$, $y = 3y_c / 2$, получаем $9x_C{}^2 + 9y_C^2 / 4 = 9$. Итак, точка C движется по эллипсу $x^2 + (y/2)^2 = 1$.

1.73. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B и C образуют треугольник KLM. Доказать, что $S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

Решение

Касательные к параболе в точках $\left(\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$ $(i = 1,2,3)$ задаются уравнениями $yy_i = px + \frac{y_i^2}{2}$.

Касательные пересекаются в точках $\left(\frac{y_i y_j}{2p}, \frac{y_i + y_j}{2}\right)$.

Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} y_1^2/2p & y_1 & 1 \\ y_2^2/2p & y_2 & 1 \\ y_1^3/2p & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$.

В то же время $S_{KLM} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} y_1 y_2/2p & (y_1 + y_2)/2 & 1 \\ y_2 y_3/2p & (y_2 + y_3)/2 & 1 \\ y_3 y_1/2p & (y_3 + y_1)/2 & 1 \end{vmatrix} \right|$.

Отсюда находим $S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

1.74. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании остается вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина? Построить ее.

Решение

Указание: вывести сначала уравнение кривой в полярных координатах r, φ. Две фиксированные вершины треугольника расположить на полярной оси, а координаты радиуса вектора точки M кривой выразить через φ и длину основания треугольника.

В соответствии с указанием сделаем рис. 5. Применяя теорию синусов, получаем:

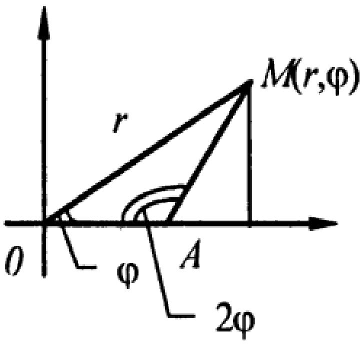

Рис. 5

$$\frac{r}{\sin 2\varphi}=\frac{a}{\sin(\pi-3\varphi)}\Rightarrow r=\frac{a\sin 2\varphi}{\sin 3\varphi}=$$

$$=\frac{2a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin 2\varphi\cos\varphi+\cos 2\varphi\sin\varphi}=$$

$$=\frac{2a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi(2\cos^2\varphi+\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}=$$

$$=\frac{2a\cos\varphi}{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}.$$

Учитывая, что $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi,$ записываем уравнение кривой в прямоугольных координатах. Имеем $r=\frac{2ax}{r(3x^2/r^2-y^2/r^2)}\Rightarrow 1=\frac{2ax}{3x^2-y^2}\Rightarrow 3x^2-2ax-y^2=0$. Выделяя полный квадрат, окончательно получаем $3(x-a/3)^2-y^2=a^2/3$, т.е. получаем гиперболу с центром в точке $(a/3;0)$.

1.75. На плоскости задана замкнутая кусочно–гладкая кривая Γ, ограничивающая выпуклую центрально–симметричную область. Доказать, что в кривую Γ можно вписать аффинно правильный шестиугольник (т.е. образ правильного шестиугольника при некотором аффинном преобразовании).

Решение

Пусть O – центр симметрии, точки $A_0,B_0\in\Gamma : A_0B_0=diam\Gamma$ (*). Тогда прямые l_{10} и l_{20} $(A_0\in l_{10},B_0\in l_{20};l_{10},l_{20}\perp A_0B_0)$ пересекают Γ в одной точке (l_{10} – в точке A_0, а l_{20} – в точке B_0), так как иначе по теореме Пифагора получаем противоречие с условием (*). Пусть прямая $l_0 \| l_{10}$ проходит через точку O, A_1 и A_2 – точки пересечения l_0 с Γ. Пусть l_1 – прямая между l_{10} и

l_0, параллельная им и такая, что $l_1 \cap \Gamma = \{B_1, B_2\}$ и $B_1B_2 = \frac{1}{2}A_1A_2$ (существует по теореме о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции). Пусть l_2 симметрична l_1 относительно $l_0, l_2 \cap \Gamma = \{C_1, C_2\}, C_1C_2 = \frac{1}{2}A_1A_2$. Пусть аффинное преобразование T переводит параллелограмм $B_1B_2A_2O$ в ромб $B_1B_2A_2O$ с ребром 1 и углом $\angle B_1OA_2 = 2\pi/3$. Тогда T переводит $B_1B_2A_2C_2C_1A_1$ в правильный шестиугольник и, значит, $B_1B_2A_2C_2C_1A_1$ – искомый.

1.76. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса, $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Какие значения может принимать произведение координат xy? В каких точках достигаются наибольшее и наименьшее значения произведения?

Решение

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел и уравнение эллипса, можно записать, что: $1 = (x/a)^2 + (y/b)^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2 / (a^2b^2)} = 2|xy|/ab \Rightarrow |xy| \leq ab/2$,

причем знак равенства имеет место только в случае $|x|/a = |y|/b$.

Итак, $|xy| \leq ab/2$, причем знак равенства достигается в точках эллипса: $M_1(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$, $M_2(-a/\sqrt{2}, -b/\sqrt{2})$, $M_3(-a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$, $M_4(a/\sqrt{2}, -b/\sqrt{2})$.

1.77. Три прямые $r = r_i + a_it (i = 1,2,3)$ попарно не пересекаются и не параллельны одной плоскости. Выразить объем параллелепипеда, три ребра которого лежат на данных прямых, через векторы r_i и a_i.

Решение

Найдем прямую, параллельную третьей и пересекающую первую и вторую. Отрезок, ограниченный точками пересечения, будет ребром параллелепипеда. Для этого нужно найти такое γ, чтобы для некоторых α и β выполнялось равенство $r_1+\alpha a_1+\gamma a_3=r_2+\beta a_2$. Числа α,β и γ определяются однозначно, поскольку векторы a_1,a_2,a_3, некомпланарны. Умножив равенство на $[a_1,a_2]$, получим $\gamma=(a_1,a_2,r_2-r_1)/(a_1,a_2,a_3)$. Таким образом, вектор, задающий одно из ребер, имеет вид $a_3\cdot(a_1,a_2,r_2-r_1)/(a_1,a_2,a_3)$. Другие векторы находятся аналогично. Найдя смешанное произведение этих векторов, получим ответ

$$V=\left|\frac{(a_1,a_2,r_2-r_1)(a_2,a_3,r_3-r_2)(a_3,a_1,r_1-r_3)}{(a_1,a_2,a_3)^2}\right|.$$

1.78. Найти уравнения сторон квадрата, описанного около эллипса $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

Решение

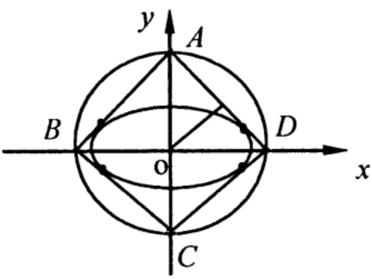

Рис. 6

Покажем сначала, что вершины описанного квадрата около эллипса $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ лежат на окружности $x^2+y^2=a^2+b^2$. Сделаем рис. 6.

Пусть $A(x_1,y_1)-$ вершина квадрата, тогда стороны квадрата AB и AD, касающиеся эллипса, взаимно перпендикулярны. Уравнения прямых (AB) и (AD) можно записать в виде $y-y_1=k(x-x_1)$ или $kx-y+y_1-kx_1=0$.

Используя условие касания прямой и эллипса $a^2A^2+b^2B^2=C^2$, имеем $k^2a^2+b^2=(y_1-kx_1)^2 \Rightarrow k^2(a^2-x_1^2)+\ 2x_1y_1+b^2-y_1^2=0$.

Это уравнение определяет угловые коэффициенты k_1 и k_2 обеих касательных (AB) и (AD). Тогда $k_1k_2=-1$ (условие перпендикулярности прямых). По теореме Виета получаем $k_1k_2=-1=(b^2-y_1^2)/(a^2-x_1^2)\Rightarrow x_1^2+y_1^2=a^2+b^2$. Отметим, что уравнению $x^2+y^2=a^2+b^2$ удовлетворяют координаты вершины любого прямого угла, стороны которого касаются эллипса (как это следует из приведенного рассуждения). Запишем теперь уравнение касательной в виде $y=kx+m$. Тогда условие касания ее эллипса имеет вид $k^2a^2+b^2=m^2$.

Центр эллипса $O(0,0)$ является центром квадрата. Расстояние от $O(0,0)$ до касательной $\sigma\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{d}{2}$, где d – длина стороны квадрата. Но $d=\sqrt{2}R=\sqrt{2(a^2+b^2)}$. Тогда получим $m^2/(1+k^2)=(a^2+b^2)/2$ или $(k^2a^2+b^2)/(1+k^2)=(a^2+b^2)/2\Rightarrow$ $\Rightarrow k^2=1\Rightarrow k=\pm 1$ и $m=\pm\sqrt{a^2+b^2}$.

Следовательно, уравнение сторон квадрата можно записать в виде $y=\pm\sqrt{a^2+b^2}\pm x$.

1.79. Существуют ли ортогональное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S\subset\mathbb{R}^2$ такие, что $f(S)\subset S$, но $f(S)\neq S$?

Решение

Пусть f – поворот плоскости вокруг точки O на угол $\pi\sqrt{2}$. Пусть $A_0\neq O$ – произвольная точка, $A_n=f(A_{n-1})$ при $n\in \mathrm{N}$. Тогда $A_n\neq A_m$ при $n\neq m$, так как число $n\sqrt{2}-m\sqrt{2}$ не является целым. Пусть $S=\{A_0,A_1,\ldots\}$, тогда $f(S)=\{A_1,A_2,\ldots\}\subset S$, но $f(S)\neq S$.

1.80. На плоскости даны точки A_1, A_2, A_3, A_4, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проведем две концентрические окружности: одну через точки A_1, A_2, A_3, а другую через точку A_4. Обозначим через $k(A_1, A_2, A_3, A_4)$ произведение площадей треугольника $A_1A_2A_3$ и получившегося кругового кольца. Доказать, что величина k не зависит от нумерации точек:

$$k(A_1, A_2, A_3, A_4) = k(A_2, A_3, A_4, A_1) = k(A_3, A_4, A_1, A_2) =$$

$$= k(A_4, A_1, A_2, A_3).$$

Решение

Пусть (x_i, y_i) – координаты точек A_i в некоторой прямоугольной системе координат Oxy. Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix}.$$

Заметив, что при переносе начала координат Δ не меняется, перенесем начало координат в точку, являющуюся центром концентрических окружностей для разбиения (A_1, A_2, A_3, A_4). Тогда в новой системе координат

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & r^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & r^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & r^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & R^2 \end{vmatrix} = (R^2 - r^2) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

откуда $|\Delta| = |R - r| \cdot 2S_{A_1A_2A_3} = \dfrac{2}{\pi} k(A_1, A_2, A_3, A_4).$

1.81. Доказать, что всякое непрерывное отображение окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.

Решение

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ непрерывна на единичной окружности комплексной плоскости. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ непрерывную функцию $\varphi(t) = f(e^{\pi i(t+1)}) - f(e^{\pi it})$. Тогда $\varphi(0) = f(-1) - f(1)$, $\varphi(1) = f(1) - f(-1) = -\varphi(0)$ и по теореме Коши найдется такая точка $t_0 \in [0,1]$, что $\varphi(t_0) = 0$, т.е. $f(e^{\pi it_0}) = f(-e^{\pi it_0})$.

1.82. Составить уравнения сторон квадрата, если две из них проходят через вершину $O(0;0)$, а на двух других сторонах лежат точки $(3;1)$ и $(8;6)$. Чему равна площадь S квадрата?

Решение

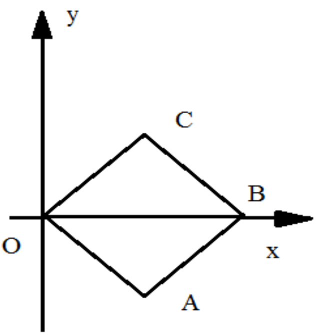

Рис. 7

Пусть $OABC$ – квадрат (см. рис.7), $M(3;1) \in (CB)$, $N(8;6) \in (AB)$. Пусть уравнение $(OA): y = kx$, тогда $(OC): y = -x/k$, $(k \neq 0)$. Если бы $k = 0$, то стороны имели бы уравнения: $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$ и полученный прямоугольник не являлся бы квадратом. Расстояния δ_1 и δ_2 от точек M и N до противоположных сторон равны: $\delta_1 = \frac{|3k-1|}{\sqrt{1+k^2}} = \delta_2 = \frac{|6k+8|}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow k_1 = -3$, $k_2 = -7/9$.

Но $k=-7/9$, иначе прямая $(OC): y=x/3$ проходила бы через точку M, что невозможно. Итак, $(OC): y=9x/7$, $(OA): y=-7x/9$. При $k=-7/9$ длина стороны квадрата $\delta_1=\frac{|3(-7/9-1|}{\sqrt{1+(7/9)^2}}=\frac{30}{\sqrt{130}}$, поэтому его площадь $S=\delta_1^2=90/13$. Уравнения сторон (AB) и (BC) имеют вид: $y-6=9(x-8)/7$, $y-1=-7(x-3)/9$ или $9x-7y-20=0$ и $7x+9y-110=0$.

1.83. $\triangle ABC$, где $A(1;-1;2), B(0;0;-2), C(4;-4;2)$, проектируется на некоторую плоскость в отрезок длиной $4\sqrt{3}$. Записать уравнение этой плоскости, зная, что она проходит через точку $M_0(1;1;1)$.

Решение

Указание: найти длины сторон $\triangle ABC$ и убедиться, что большая сторона его параллельна искомой плоскости, а плоскость $\triangle ABC$ к ней перпендикулярна.

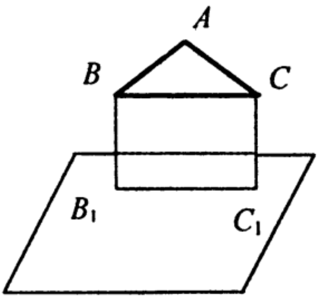

Рис. 8

В соответствии с указанием находим $\overrightarrow{AB}(-1;1;4), \overrightarrow{AC}(3;-3;0), \overrightarrow{BC}(4;-4;4)$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=3\sqrt{2}<|\overrightarrow{BC}|=4\sqrt{3}$. Поэтому сторона BC $\triangle ABC$ проектируется на искомую плоскость в натуральную величину, т.е. $\overrightarrow{BC}$ параллельна искомой плоскости, а плоскость $\triangle ABC$ – перпендикулярна к ней (см. рис. 8). Пусть $\vec{n}(A_0,B_0,C_0)$ – нормаль к искомой плоскости, тогда ее уравнение $A_0(x-1)+B_0(y-1)+C_0(z-1)=0$ $\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}$ и $\vec{n}\perp\vec{n}_1$, где $\vec{n}_1$ – нормаль к плоскости $\triangle ABC$. Поэтому за $\vec{n}$ можно взять $\overrightarrow{BC}\times\vec{n}_1$.

Имеем $\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -12(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$, $\vec{n} = \overrightarrow{BC} \times \vec{n}_1 = -12(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$, и уравнение искомой плоскости будет иметь вид: $x - y - 2z + 2 = 0$.

1.84. Пусть P – периметр треугольника с целочисленными координатами вершин на плоскости Oxy, R – радиус описанной около треугольника окружности. Доказать неравенство $P^3 \geq 54R.$

Решение

Пусть a, b, c – стороны треугольника, тогда

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc = 4SR \geq 2R,$$

так как площадь треугольника с целочисленными вершинами не менее $\frac{1}{2}$.

1.85. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ освещена пучком лучей, параллельных прямой $x = 0, y = z$. Найти уравнение границы тени на плоскости xOy.

Решение

Пусть $M_0(x_0; y_0; 0)$ – произвольная точка границы тени на плоскости xOy. Проведем через M_0 прямую, параллельную прямой $\begin{cases} x = 0, \\ y = z \end{cases}$ или $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Имеем $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z}{1}$. Эта прямая касается сферы. Поэтому для нахождения координаты точки касания $M(x; y; z)$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z = y - y_0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z, \end{cases}$$

сводящуюся к квадратному уравнению $2y^2 - 2y(y_0 + 2) + x_0^2 + y_0^2 + 4y_0 = 0$. Это уравнение должно иметь равные корни, т.е. дискриминант его $D = ((y_0 + 2)^2 - 2(x_0^2 + y_0^2 + +4y_0))4 = 0$. Отсюда находим зависимость между координатами любой точки $M_0(x_0; y_0)$ границы тени на плоскости xOy, т.е. ее уравнение $(x_0 / 2)^2 + (y_0 + 2)^2 / 8 = 1$. Это эллипс с центром в точке $C(0; -2)$ и полуосями $a = 2, b = 2\sqrt{2}.$

1.86. Изобразить на плоскости xOy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют соотношениям:

1) $\left(x - |x|\right)^2 + \left(y - |y|\right)^2 \le 4$;

2) $\left(x - |x|/2\right)^2 + \left(y - |y|/2\right)^2 \le 4$;

3) $\left(x - \sqrt{y}\right)\left(3 - x^2 - 2y^2\right) \ge 0$;

4) $|3 - x| \ge y^2 - 1$;

5) $0{,}5\sin \pi U + U = 1$ в случаях:

а) $U = x + y$; б) $U = x^2 + 2y^2$; в) $U = y - x^2$.

Решение

1. Множество точек ограничено прямыми $y = -1(x \ge 0)$, $x = -1\left(y \ge 0\right)$ и дугой окружности $x^2 + y^2 = 1(x < 0, y < 0)$.

2. Множество точек ограничено дугами кривых: эллипса $x^2 + 9y^2 = 16(x \ge 0, y \ge 0)$, эллипса $9x^2 + y^2 = = 16(x < 0, y < 0)$, окружности $x^2 + y^2 = 16/9(x < 0, y < 0)$, окружности $x^2 + y^2 = 16(x > 0, y < 0)$.

3. Множество точек лежит в первом квадранте $(x \ge 0, y \ge 0)$ между параболой $\sqrt{y} = x$, эллипсом $x^2 + 2y^2 = 3$ и осью Ox, а

также в полуплоскости $y \geq 0$ выше эллипса $x^2 + 2y^2 = 3$ и левее параболы $\sqrt{y} = x$.

4. Множество точек заполняет внутренность параболы $y^2 = 4 - x$ и внутренность параболы $y^2 = x - 2$ правее параболы $y^2 = 4 - x$ (см. рис. 9).

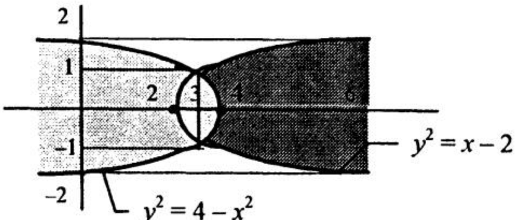

Рис. 9

5. Уравнение $0{,}5\sin \pi U = 1 - U$ имеет только три корня: $U_1 = 1$, $U_2 = 0{,}5$, $U_3 = 1{,}5$.

Поэтому множество точек заполняет линии в случае: а) – прямые $x + y = U_k$; б) – эллипсы $x^2 + 2y^2 = U_k$; в) – параболы $y - x^2 = U_k$, $k = 1, 2, 3$.

1.87 Поверхность $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – многочлен степени не ниже второй, обладает свойством: *через любую ее точку можно провести две прямые, целиком лежащие на поверхности.* Доказать, что поверхность – гиперболический параболоид.

Решение

Примем за начало координат O какую-нибудь точку на поверхности. Ось Ox направим по одной образующей, ось Oy – по другой, ось Oz оставим прежней. В новых координатах уравнение поверхности имеет вид $z = g(x, y)$, где g – многочлен степени не ниже второй, $g(0, y) = g(x, 0) = 0$, т.е. $g(x, y) = xyh(x, y)$. Остается доказать, что $h(x, y) = const$.

Заметим, что если l – какая-либо образующая, а l_1 – ее проекция на плоскость Oxy, то функция g на прямой l_1 линейна.

Действительно, пусть l_1 имеет уравнение $x = x_0 + at, y = y_0 + bt,$ тогда $g(x_0 + at, y_0 + bt) = z_0 + ct.$

Рассмотрим точку $(0, y_0, 0)$ на поверхности, $y_0 \neq 0$. Кроме оси Oy через эту точку проходит еще одна образующая $l.$

Запишем ее уравнение в виде $y = y_0 + ax, z = bx.$ Тогда имеем тождественно по x:

$$bx = x(y_0 + ax)h(x, y_0 + ax). \qquad (*)$$

Покажем, что $a = 0.$ Если это не так, то из (*) следует, что $h(x, y_0 + ax) = 0$ тождественно по x, т.е. многочлен g обращается в ноль на трех прямых: $x = 0, y = 0, y = y_0 + ax.$ Возьмем любую точку (x_1, y_1) внутри треугольника, ограниченного этими прямыми. Рассмотрим одну из двух образующих, проходящих через точку $(x_1, y_1, g(x_1, y_1))$. Проекция этой образующей пересекает границу треугольника в двух точках, в этих точках g обращается в ноль. Так как g линейна на проекции образующей, то $g(x_1, y_1) = 0$ внутри треугольника, а значит, и везде, так как g – многочлен. Это противоречит тому, что $g \neq 0$ тождественно.

При $a = 0$ из (*) получаем, что $h(x, y_0) = \alpha(y_0)$. Аналогично, рассматривая точку $(x_0, 0, 0),$ получим $h(x_0, y) = \beta(x_0)$. Тогда для любой точки (x_0, y_0) имеем $h(x_0, y_0) = \alpha(y_0) = \beta(x_0)$ и $h = const.$

1.88 Найти прямолинейные образующие заданной поверхности (т.е. прямые, лежащие на поверхности), проходящие через точку $M_0(1;1;1)$: 1) $x^2 + y^2 - z^2 = 1;$

2) $2xy + yz - xz = 2.$

Решение

1. Запишем уравнения любой прямой, проходящей через точку $M_0(1;1;1)$: $\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y-1}{p}=\dfrac{z-1}{\ell}=t$ или в параметрическом виде: $x=mt+1$; $y=pt+1$; $z=\ell t+1$. По определению прямолинейной образующей $\forall t\in R$ должно выполняться тождество: $(mt+1)^2+(pt+1)^2-(\ell t+1)^2=1$, полученное из уравнения поверхности $x^2+y^2-z^2=1$. Из тождества $(m^2+p^2-\ell^2)t^2+2t(m+p-\ell)=0\Rightarrow\begin{cases}m^2+p^2-\ell^2=0\\ m+p-\ell=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow m^2-(p+\ell)m=0$, $m(m-p-\ell)=0\Rightarrow$: а) $m=0$, тогда $p=\ell$ и уравнения образующей будут: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{p}=\dfrac{z-1}{p}$ или $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$; б) $m\neq 0$, тогда $\begin{cases}m=p+\ell\\ m=\ell-p\end{cases}\Rightarrow 2m=2\ell$, $m=\ell$, $p=0$ и уравнения образующей будут $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$.

2. $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$ и $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

1.89 Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с любой его точкой, заключена между большой и малой полуосями.

Решение

Пусть дан эллипс $(x/a)^2+(y/b)^2=1$, причем $a>b$. Тогда для любой точки $M(x;y)$ эллипса $(x;y)$:

$1=(x/a)^2+(y/b)^2\le(x^2+y^2)/b^2\Rightarrow x^2+y^2\ge b^2$;

$1=(x/a)^2+(y/b)^2\ge(x^2+y^2)/a^2\Rightarrow x^2+y^2\le a^2$,

т.е. $b\le(x^2+y^2)^{1/2}\le a$.

1.90 Отрезок длиной $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Найти уравнение геометрического места точек – оснований перпендикуляров, опущенных из вершины угла на отрезок.

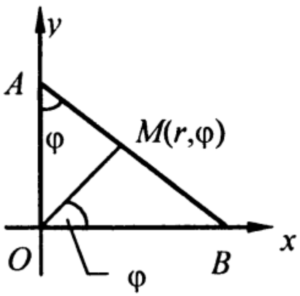

Рис. 10

Решение

Пусть стороны прямого угла совпадают с осями координат и M – основание перпендикуляра, опущенного из вершины O на отрезок $[AB]$ (рис. 10).

Полярная ось совмещена с осью Ox. Из $\triangle OMB$ находим $|OM| = r = |OB|\cos\varphi$, а из $\triangle AOB$ – $|OB| = |AB|\sin\varphi = 2a\sin\varphi$. Поэтому $r = 2a\sin\varphi\cos\varphi = a\sin 2\varphi$, причем $0 \le \varphi \le \pi/2$. Следовательно, геометрическим местом оснований перпендикуляров будет один лепесток «розы» $r = a\sin 2\varphi$.

1.91 На плоскости заданы две точки $A(-1;1)$, $B(1;2,5)$ и взята точка $C(x;y)$ на кривой $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$. Какое наибольшее значение может иметь площадь ΔABC? Найти координаты точки C.

Решение

Запишем уравнение окружности в виде $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, тогда $O_1(1;-2)$ – центр, а $R = 2$ – радиус окружности. Точки $A(-1;1)$ и $B(1;2,5)$ лежат вне круга, так как, подставив координаты их в левую часть уравнений окружности, получим $(-2)^2 + 3^2 > 4; 0^2 + (4,5)^2 > 4$ (рис. 11).

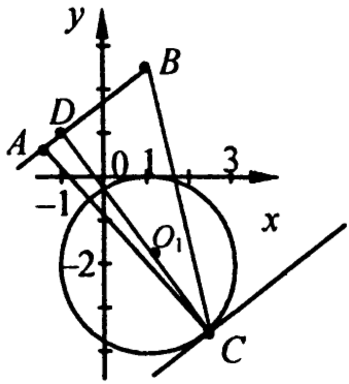

Рис. 11

Так как $(-2)^2+3^2>4; 0^2+(4,5)^2>4$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|h$ и $|AB|=\sqrt{4+2,25}=2,5$, то $S=\max$, если $h=\max$. Высота h будет максимальной, если касательная к окружности в точке C будет параллельна хорде AB, т.е. центр окружности будет наиболее удален от $[AB]$. Поэтому $(AB):|O_1D|+|O_1C|=\delta+R=\delta+2$.

Найдем δ – расстояние от O_1 до $(AB):3x-4y+7=0$. Имеем $\delta=|3\times1-4(-2)+7|/5=28/5$.

Итак, $S_{\max}=\frac{1}{2}\times2,5\times28/5=7$. Для нахождения координат точки C запишем уравнение (DC), зная, что она проходит через $O_1\perp[AB]$. Имеем нормаль к (DC) $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(2;1,5)$, поэтому $2(x-1)+1,5(y+2)=0$, $(DC):4x+3y+2=0$.

Координаты точки C найдем из системы уравнений

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=4\\ 4x+3y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=-(3y+2)/4\\ (y+2)^2=64/25\end{matrix}\Rightarrow C_1(-1/5;-2/5),$$

$C_2(11/5;-18/5)$.

Сравнивая расстояния C_1 и C_2 до $(AB):3x-4y+7=0$, $\delta_1=8/5$, заключаем, что C_2 – наиболее удаленная точка окружности.

1.92 Заданы уравнения двух сторон ромба $4x+3y-1=0$, $3x+4y+1=0$ и одна из его вершин $(-6;6)$. Найти площадь S ромба.

Решение

Пусть $ABCD$ – ромб. Из уравнений двух его сторон $4x+3y-1=0$ и $4x+3y+1=0$ видно, что это пересекающиеся стороны и вершина $(-6;6)$ не лежит на них.

Пусть 1–е уравнение – это (AB), а 2–е – (AD) и $C(-6;6)$. Решим задачу вторым способом. Найдем $\cos A$, $\hat{A}=(\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2)$, где $\vec{n}_1(4;3)$, $\vec{n}_2(3;4)$. Имеем $\cos A=$ $=\vec{n}_1\vec{n}_2/(|\vec{n}_1||\vec{n}_2|)=24/25 \Rightarrow \sin A=7/25$. Далее, $S=a^2\sin A=ah$, где a – сторона, а h – высота ромба. Так как $h=\delta$ – расстояние от точки C до (AB), то $h=\ =|4-(6)+3\times 6-1|/5=7/5$. Поэтому $a=h/(\sin A)=7/5:7/25=5$ и $S=5\times 7/5=z$.

1.93 Найти координаты точки M_0 прямой (l), ближайшей к кривой (L), и кратчайшее расстояние от M_0 до (L):

1) $(l): 3x-4y+23=0$, $(L): x^2-2x+y^2-24=0$;

2) $(l): x+y+7=0$; $(L): y^2=12x$;

3) $(l): x+y=5$; $(L): 3x^2+y^2=3$.

Решение

1. $M_0(-2{,}12;4{,}16)$; $0{,}2$.

2. $M_0(1;-8)$; 4.

3. Убедимся, что у эллипса $x^2+y^2/3=1$ нет общих точек с прямой $x+y=5$. Это можно сделать двумя способами: а) найти

дискриминант квадратного уравнения, полученного исключением, например, y из системы уравнений: $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x^2+y^2=3 \end{cases} \Rightarrow 3x^2+(5-x)^2-3=0 \Rightarrow 4x^2-10x+22=0$;
$L=10^2-16\cdot 22<0$.

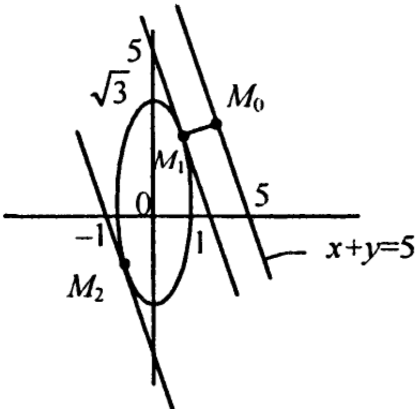

Рис. 12

Отметим, что этот способ применим всегда; б) при данном условии проще найти расстояние от центра эллипса $O(0;0)$ до прямой, убедившись, что оно $\sigma=5/\sqrt{2}>\sqrt{3}$ больше большей полуоси – наибольшего расстояния от центра эллипса до любой его точки (см. также рис. 12). Для нахождения кратчайшего расстояния от эллипса до прямой проведем касательную к эллипсу, параллельную прямой, ее уравнение $x+y=c$. Для нахождения c найдем дискриминант квадратного уравнения $3x^2+(c-x)^2=3$ и приравняем его нулю.

Имеем $L=4(12-3c^2)=0 \Rightarrow c=\pm 2$. Получим две касательные $x+y=2$ и $x-y=-2$. Ближайшей к прямой $x+y=5$ будет точка касания M_1, а M_2– наиболее удаленная от этой прямой точка эллипса. Координаты точек M_1 и M_2 получаем из рассмотренного квадратного уравнения при $c=\pm 2$ (абсциссы) $x=\pm 1/2$, а ординаты – из уравнения эллипса $y^2=3-3\cdot(1/4)=3\cdot 3/4 \Rightarrow \Rightarrow y=\pm 3/2$. Итак, $M_1(1/2,3/2)$, $M_2(-1/2,3/2)$ (см. рис. 10). Для нахождения точки M_0 прямой, ближайшей к эллипсу, найдем уравнение (M_1,M_0)– прямой, перпендикулярной к $x+y=5$ и проходящей через точку M_1.

Имеем $x-1/2=y-3/2 \Rightarrow x-y+1=0$ и решаем систему уравнений: $\begin{cases} x-y+1=0, \\ x+y-5=0 \end{cases} \Rightarrow x=2$; $y=3$. Итак, $M_0(2,3)$.

1.94 Найти геометрическое место центров кругов, отсекающих от двух перпендикулярных прямых отрезки $2a$ и $2b$.

Решение

Пусть $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ – окружность, отсекающая на оси Ox отрезок $2a$ и на Oy – $2b$. Тогда при $y=0$ имеем $(x-x_0)^2=R^2-y_0^2$, а при $x=0$ – $(y-y_0)^2=R^2-x_0^2$. По условию $R^2-y_0^2=a^2$, $R^2-x_0^2=b^2$. Вычитая почленно последние равенства, получаем $x_0{}^2-y_0{}^2=a^2-b^2$. Следовательно, при $a\neq b$ точка C описывает равнобочную гиперболу $x^2-y^2=a^2+b^2$, а при $a=b$ – пару прямых $-y=\pm x$.

1.95 Окружность $\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4, \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$ проектируется на некоторую плоскость, проходящую через $O(0;0;0)$, в отрезок прямой. Составить уравнение этой плоскости, зная, что она отстоит от центра окружности на расстояние $\frac{1}{2}$ ее радиуса.

Решение

Так как центр $C(1;-1;0)$ сферы принадлежит плоскости $2x+2y+z=0 \Rightarrow 2-2+0=0$, то заданная окружность – окружность большого круга сферы, т.е. C – центр окружности и ее радиус также равен $R=2$. Уравнение искомой плоскости будем искать в виде $\alpha x+\beta y+z=0$. Для нахождения α и β используем, что эта плоскость перпендикулярна к плоскости

$2x+2y+z=0$, т.е. $\vec{n}_1(\alpha,\beta,1)\perp\vec{n}_2(2,2,1)$ и $\vec{n}_1\vec{n}_2=0\Rightarrow 2\alpha+2\beta+1=0$. Второе уравнение для нахождения α, β получаем, пользуясь тем, что расстояние от $C(1;-1;0)$ до искомой плоскости равно $1/2R=1$; $|\alpha\cdot 1-\beta\cdot 1+0|/\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}=1$. Из системы уравнений

$$\begin{cases}2\alpha+2\beta+1=0,\\ \alpha^2+\beta^2+1=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+2\beta+1=0,\\ 2\alpha\beta=-1\end{cases}$$

находим $\alpha_1=-1,\beta_1=1/2,\alpha_2=1/2,\beta_2=-1$. Следовательно, искомая плоскость может иметь уравнение $x-2y+2z=0$ или $2x-y-2z=0$. Не трудно проверить, что эти плоскости взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к плоскости $2x+2y+z=0,$ в которой лежит окружность.

1.96. Дан треугольник с вершинами $A(0;-4)$, $B(3;0)$, $C(0;6)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы A.

Решение

Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}==3\vec{i}+4\vec{j}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}=10\vec{j}$, AD – биссектриса угла (рис.13). Направляющий вектор $\vec{i}$ биссектрисы AD можно записать в виде: $\vec{i}=\overrightarrow{a^0}+\overrightarrow{b^0}=\dfrac{(3\vec{i}+4\vec{j})}{5}+\vec{j}=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{9}{5}\right)$. Поэтому уравнение $(AD): x/3=(y+4)/9\Rightarrow y+4-3x=0$. Тогда $|CD|=\delta=\dfrac{|6+4-3...0|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$.

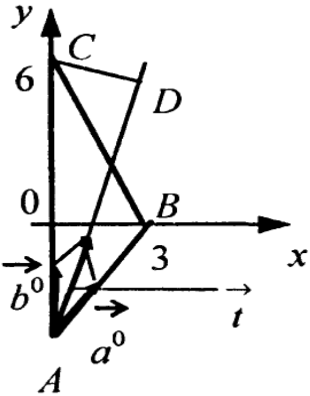

Рис. 13

1.97. Кривая задана уравнением $r = 3 + \cos\varphi$ (r и φ – полярные координаты точки). Показать, что любая хорда, проходящая через полюс, имеет одну и ту же длину.

Решение

Кривая симметрична относительно полярной оси, так как $r = (-\varphi) = 3 + \cos(-\varphi) = 3 + \cos\varphi = r(\varphi)$.

Пусть $A(r(\varphi), \varphi), B(r(\varphi + \pi), \varphi + \pi)$ – концы хорды кривой, тогда $|AB| = r(\varphi) + r(\varphi + \pi) = 3 + \cos\varphi + 3\cos(\varphi + \pi) = 6.$

1.98. Окружность вписана: 1) в квадрат; 2) в правильный треугольник. Доказать, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин фигуры постоянна. Найти эти постоянные

Решение

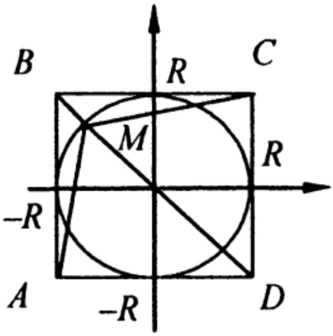

Рис. 14

1. Пусть $x^2 + y^2 = R^2$ – окружность, вписанная в квадрат $ABCD$ (см. рис. 14), и $M(x; y)$ – произвольная точка окружности. Тогда вершины квадрата имеют координаты: $A(-R; -R)$, $B(-R; R)$, $C(R; R)$, $D(R; -R)$.

Имеем $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 =$

$= (x+R)^2(y+R)^2(x+R)^2 + (y-R)^2 + (x-R)^2 + (y-R)^2 + (x-R)^2 + $ $+(y+R)^2 = 4(x^2 + y^2 + 2R) = 4(R^2 + 2R^2) = 12R^2 = 3a^2$, где a – сторона квадрата.

2. $5a^2 / 4$, где a – сторона правильного треугольника.

1.99. На плоскости расположены две параболы так, что их оси взаимно перпендикулярны, а сами параболы пересекаются в 4 –х точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

Решение

Сделаем рис. 15, выбрав систему координат так, чтобы оси парабол совпадали с осями координат. Уравнения парабол можно записать в виде $x^2 = -2p(y - y_0)$ и $y^2 = 2q(x - x_0)$, где $x_0 < 0$, $y_0 > 0$. Координаты точек пересечения парабол M_k, $k = \overline{1,4}$, удовлетворяют системе уравнений:

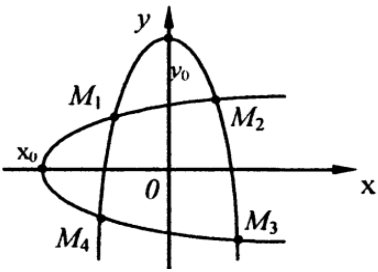

Рис. 15

$$\begin{cases} x^2 = -2p(y - y_0), \\ y^2 = 2q(x - x_0). \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получаем $x^2 + y^2 + 2py -$
$-2qx = 2py_0 - 2x_0q \Rightarrow (x-q)^2 + (y+p)^2 = p^2 + q^2 + 2py_0 - 2x_0q$, так как правая часть равенства положительная, то получаем окружность радиусом $R = \sqrt{p^2 + q^2 + 2(py_0 - x_0q)}$ с центром в точке $(q, -p)$.

1.100. Фокусы эллипса находятся в точках $F_1(1;0), F_2(0;1)$, а большая ось равна 2. Составить уравнение эллипса.

Решение

Найдем уравнение эллипса, используя определение эллипса. Пусть $M(x;y)-$ произвольная точка эллипса, тогда $|MF_1| + |MF_2| = 2a;$ используя условия: $F_1(1;0), F_2(0;1)$, $2a = 2$, имеем $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x^2 + (y-1)^2} = 2$. Избавляясь от корней, получаем, что уравнение эллипса имеет вид $3(x^2 + y^2) - 4(x - y) + 2xy = 0.$

Приведем второй способ решения. Из условия следует, что осями симметрии эллипса будут прямые $(F_1,F_2): x+y=1$ и $y=x$, а O_1– центр эллипса (см. рис. 16) будет иметь координаты $O_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Найдем абсциссу x вершины A_1, ее ордината – $y=1-x$. Имеем:

$$|O_1A_1|^2=1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-x-\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=1,\ x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

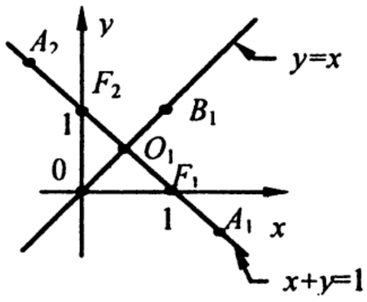

Рис. 16

т.е. $A_1(1/2+1/\sqrt{2};1/2-1/\sqrt{2})$, тогда $A_2(1/2-1/\sqrt{2};1/2+1/\sqrt{2})$. Так как эллипс симметричен относительно $y=x$, то его уравнение не должно меняться при замене y на x и x на y. Поэтому будем искать уравнение эллипса в виде $A(x^2+y^2)+Bxy+$ $+C(x+y)+D=0$ или $x^2+y^2+B_0xy+C_0(x+y)+D_0=0$. Покажем, что $D_0=0$, для чего найдем координаты вершин B_1,B_2, лежащих на прямой $y=x$. Найдем сначала малую полуось b. Так как для эллипса $a^2-c^2=b^2$ и $a=1$, $c=|O_1F|=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $b^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, т.е. $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Имеем $B_1(x;x)$, $|B_1O_1|=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\Rightarrow 1=2\left|x-\frac{1}{2}\right|\Rightarrow x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}$; $x_1=1; x_2=0$, поэтому $B_1(1;1), B_2(0;0)$ и $D_0=0$. Осталось определить коэффициенты B_0 и C_0. Подставляя в уравнение эллипса координаты точек $B_1(1;1)$ и $A_1((1+\sqrt{2})/2;(1-\sqrt{2})/2)$, получаем уравнение для нахождения B_1 и C_1:

$B_0+2C_0=-2; B_0-4C_0=6 \Rightarrow B_0=2/3; C_0=-4/3$. Следовательно, уравнение эллипса принимает тот же вид, что и в решении, полученном 1–м способом.

Наконец, можно получить уравнение эллипса, используя формулы преобразования координат «поворот» и «перенос».

1.101. Найти геометрическое место точек, из которых на ровной местности выстрел из винтовки и удар пули, попавший в цель, слышны в одно и то же мгновение. Скорость звука – V, пули V_1, а расстояние между стрелявшим и мишенью $a=const$.

Решение

Пусть M – точка на местности, в которой выстрел и удар пули в цель слышны одновременно (см. рис 17), A – положение стрелявшего, B – цель. Посчитаем время t двумя способами: $t=\dfrac{r_1}{V}$, $t=\dfrac{r_2}{V}+\dfrac{a}{V_1}$ (очевидно, $V_1>V$). Тогда разность $r_1-r_2=\dfrac{aV}{V_1}=const$, т.е. геометрическое место точек M – ветвь гиперболы. Это уравнение можно записать в виде $(1-m^2)x^2-m^2y^2=(am)^2(1-m^2)$, где $m=V/V_1<1$, причем рассматривается ветвь гиперболы, расположенная ближе к цели.

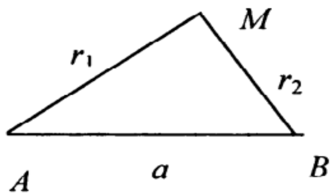

Рис. 17

1.102. Через точку $(1;4;1)$ провести плоскость, касающуюся парабол: $y=0$, $z^2=8x$ и $z=0$, $y^2=32x$.

Решение

Уравнение искомой плоскости запишем в виде $x-1+\alpha(y-4)+\beta(z-1)=0$. Из условий касания плоскости параболы $y=0$, $z^2=8x$ получаем $x=1+4\alpha-\beta(z-1)\Rightarrow$ $\Rightarrow z^2+8\beta z-8\beta-32\alpha-8=0$. Приравнивая дискриминант квадратного уравнения к нулю, получаем $2\beta^2+\beta+4\alpha+1=0$, из условий касания 2–й параболы аналогично получаем $8\alpha^2+4\alpha+\beta+1=0$. Находим: $\alpha_1=-0,5;$ $\beta_1=-1;$ $\alpha_2=-0,25;$ $\beta_2=-0,5$ и получаем уравнения 2–х касательных плоскостей: $2x-y-2z+4=0$ и $4x-y-2z+2=0$.

1.103. На эллипсе $x^2+xy+y^2=9$ взяты две точки $A(0;3)$ и $B(3;-3)$. Указать на нем такую точку C, чтобы площадь S $_{\vartriangle}ABC$ была наибольшей. Найти эту площадь и эксцентриситет эллипса.

Решение

Так как уравнение эллипса $x^2+xy+y^2=9$ не изменяется при замене y на x и x на y, то он симметричен относительно прямой $y=x$, $y=-x$ – 2–я ось симметрии (уравнение не изменяется также при замене x на $-y$ и y на $-x$). Поэтому центр эллипса $O(0;0)$ – точка пересечения осей симметрии. Эллипс изображен на рис. 18. $S_{\vartriangle ABC}=S=\max$, если высота $|CD|=\max$, так как основание $|AB|=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$ – число.

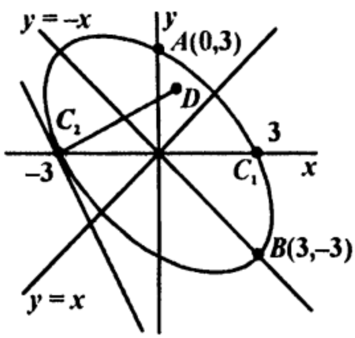

Рис. 18

$$S=1/2|CD||AB|=\frac{1}{2}h\cdot 3\sqrt{5},$$

$h=\max$, если касательная в точке C эллипса будет параллельна хорде (AB). Уравнение $(AB): y=3-2x$, поэтому уравнение касательной можно записать в виде $y=m-2x$. Подберем m так, чтобы эта прямая имела с эллипсом только одну общую точку. Имеем $9 = x^2 + y(x+y) = = x^2 + (m-2x)(x+m-2x) \Rightarrow 3x^2 - 3mx + m^2 - 9 = 0$. Найдем дискриминант квадратного уравнения и приравняем его к нулю: $D = 9m^2 - 12(m^2 - 9) = 0 \Rightarrow m^2 = 36, m = \pm 6$. При $m = 6$ получим $x_1 = 3, y_1 = 6 - 2x_1 = 0$, если $m = -6$, получим $x_2 = -3, y_2 = 0.$ Получили две точки: $C_1(3;0)$ и $C_2(-3;0)$. Наиболее удаленной от $[AB]$ будет C_2. $h_{\max} = |C_2D| = |3 - 2x_2 - y_2| / \sqrt{5} = 9\sqrt{5}.$ Поэтому $S_{\max} = (1/2)\cdot(9\sqrt{5})\cdot 3\sqrt{5} = 13{,}5$. Для нахождения эксцентриситета эллипса ε найдем полуоси эллипса: $|OB| = a = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ [$B(3;-3)$ – одна из вершин эллипса]. Координаты точки M найдем из системы уравнений (пересечение эллипса с осью симметрии $y = +x$):

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 3x^2 = 9, x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Поэтому $M(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и $b = |OM| = \sqrt{6}$. Имеем

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{6}}; \varepsilon = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

1.104. Числа x и y удовлетворяют неравенствам:

1) $x^2 - 2x + y^2 - 8 \le 0$ и $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 3 \le 0$; 2) $x^2 \le y \le 4 + \sqrt{4 - x^2}$. Какие значения может принимать сумма $U = 3x + 4y$?

Решение

1. $-2 \le U \le 18$.

2. Неравенство $x^2 \le y \le 4 + \sqrt{4 - x^2}$ означает, что область изменения (x, y) ограничена параболой $y = x^2$ (снизу), а сверху – полуокружностью $y = 4 + \sqrt{4 - x^2}$ (см. рис. 19). Отметим, что $x^2 \le y \le 4 + \sqrt{4 - x^2}$, так как $x^2 \le 4$, а первая часть ≥ 4. Из рис. 19

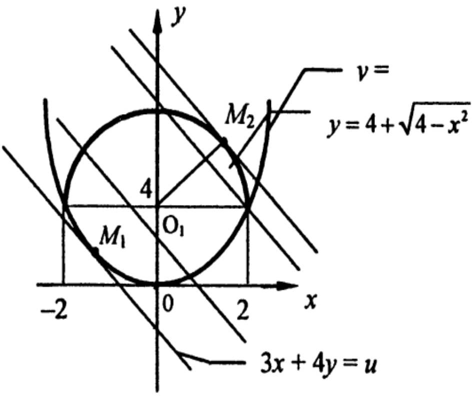

Рис. 19

видно, что при перемещении прямой $3x+4y=U$ параллельно самой себе (при изменении U): $U_1=U_{\min}=U(x_1,y_1)$, где (x_1,y_1) – координаты точки M_1, в которой прямая касается параболы, а $U_2=U_{\max}$ достигается в точке $M_2(x_2,y_2)$, в которой прямая касается окружности. Значение U_2 находим из условия касания окружности и прямой:

$$\left|3\times 0+4\times 4-U_2\right|/\sqrt{9+16}=R=2\Rightarrow \Rightarrow\left|U_2-16\right|=10\Rightarrow U_2^{(1)}=26,$$

$U_2^{(2)}=6$, $U_{\max}=26$. Можно доказать, что $M_2(6/5;28/5)$ и $U(x_2,y_2)=26$. Для нахождения U_1 используем условие касания параболы $y=x^2$ и прямой $pk^2+2b=0$, где $x^2=2py$ – парабола, а $y=kx+b$ – прямая. В нашем случае $p=1/2$, $k=-3/4$, $b=U_1/4$, т.е. $(1/2)\times(9/16)+U_1/2=0\Rightarrow U_1=U_{\min}=-9/16$.

1.105. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность $\begin{cases}x^2+y^2=11,\\ z=0;\end{cases}$ и касающейся плоскости $x+y+z-5=0.$

Решение

Пусть $O(0;0;z_0)$ – центр искомой сферы, R – ее радиус. Тогда расстояние от O до $O_1(0;0;0)$ – центра заданной окружности равно $\left|OO_1\right|=\left|z_0\right|$ (как расстояние от O до плоскости

$z = 0$). Тогда $R^2 = 11 + z_0^2$, где $r = \sqrt{11}$ – радиус данной окружности. С другой стороны, R – это расстояние от центра сферы О до касательной плоскости $x + y + z - 5 = 0$, т.е. $R = |z_0 - 5| / \sqrt{3}$. Из системы уравнений $\begin{cases} R^2 = 11 + z_0^2, \\ |z_0 - 5| / \sqrt{3} = R \end{cases}$ находим z_0 и R.

$z_0^{(1)} = -1;\ z_0^{(2)} = -4;$ $R_1 = 11 + 1 = 12;$ $R_2 = 11 + 16 = 27$. Итак, получим две сферы: $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 12$ и $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 27$.

1.106. Прямоугольный треугольник с катетами a и b скользит их концами по осям координат. Найти геометрическое место вершин прямого угла.

Решение

Пусть $CB = a$ и $CA = b$ – катеты $\triangle ABC$ и $C(x_0, y_0)$ – вершина прямого угла (см. рис. 20). Имеем: $|MA| = \sqrt{b^2 - y_0^2}$,

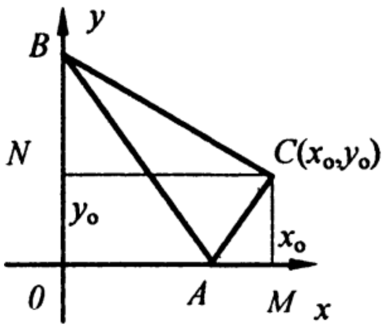

Рис. 20

$|OA| = x_0 - |MA| = x_0 - \sqrt{b^2 - y_0^2}$,

$|BN| = \sqrt{a^2 - x_0^2}$, $|ON| = y_0$,

$|BO| = y_0 + \sqrt{a^2 - x^2}$. Так как $|OB|^2 = |OA|^2 = |AB|^2 = a^2 + b^2$, то получаем:

$$(y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2})^2 + (x_0 - \sqrt{b^2 - y_0^2})^2 = = a^2 + b^2 \Rightarrow y_0\sqrt{a^2 - x_0^2} = = x_0\sqrt{b^2 - y^2} \Rightarrow y^2 a^2 = x^2 b^2 \Rightarrow y = \pm bx / a.$$

Замечание. Если считать, что точка С движется в 1–м квадранте $(x_0 > 0, y_0 > 0)$, то $y = bx / a$.

1.107. Найти кратчайшее расстояние от точки $M_0(0;-1;1)$ до окружности $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0, \\ 2x+2y+z+1=0 \end{cases}$ и координаты центра этой окружности.

Решение

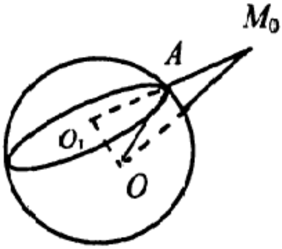

Рис. 21

Запишем уравнение сферы в виде: $(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. Так как $6^2+1+4>25$, то точка $M_0(0;-1;1)$ лежит вне сферы, а значит, и вне окружности, но $M_0 \in$ плоскости $2x+2y+z+1=0$, ибо $2\cdot 0+2\cdot(-1)+1+1=0$ (см. рис. 21). Тогда $\sigma_{\min}=|AM_0|=|O_1M_0|-r, r=|O_1A|$. Найдем r, для чего сначала определим $\sigma_1=|OO_1|=|2\cdot 6+2\cdot(-2)+3+1|/3=4$. Так как гипотенуза прямоугольного треугольника O_1OA $|OA|=R=5$, то $|O_1A|=r=3$.

Далее $|OM_0|=\sqrt{41}$, поэтому из $\triangle OO_1M_0$ находим $|O_1M_0|=\sqrt{|OM_0|^2-\sigma_1^2}=\sqrt{41-16}=5$. Итак, кратчайшее расстояние от M_0 до окружности $\sigma_{\min}=|O_1M_0|-r=5-3=2$.

Для нахождения координат центра O_1 окружности найдем точку пересечения прямой (OO_1) с плоскостью $2x+2y+z+1=0$, в которой лежит окружность. $(OO_1)\perp$ этой плоскости, поэтому уравнение (OO_1) имеет вид: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}=t$ или в параметрическом виде $x=2t+6, y=2t-2, z=t+3$. Из уравнения $2(2t+6)+2(2t+2)+t+3+1=0$ находим $t=-4/3$. Следовательно, $O_1(10/3;-14/3;5/3)$.