# Лекция 5. Алгоритмическая система Тьюринга. Конструирование машин Тьюринга.

## Алгоритмическая система Тьюринга

В 1936 году, будучи студентом Кембриджского университета, английский математик Алан Мэтисон Тьюринг (1912 – 1954) написал статью «О вычислимых числах с приложением к проблеме разрешения», в которой рассмотрел гипотетическое «абстрактное» устройство, впоследствии получившее название «машины Тьюринга».

Машина Тьюринга состоит из бесконечной ленты и каретки (считывающе-записывающего устройства). На каждом шаге вычислений следующее действие машины целиком определяется ее текущим состоянием и символом, который в данный момент считывается (*текущим символом*). Машина пригодна для решения любой разрешимой математической или логической задачи. Однако цель Тьюринга заключалась не в изобретении компьютера, а в описании задач, не имеющих решения, в создании инструмента для изучения разрешимости математических проблем.

Рассмотрим подробнее устройство машины Тьюринга (МТ).

## Устройство МТ

Машина Тьюринга – это абстрактное устройство, состоящее из бесконечной ленты, разделенной на равные секции (*ячейки*) и считывающе-записывающего устройства (*каретки*). В каждой ячейке ленты может быть записан только один символ. Число возможных символов конечно и образует **внешний алфавит** машины:

$$\boldsymbol{A} = \{ a_1, a_2, \ldots, a_m \}.$$

Отсутствие символа в ячейке обозначается специальным (*пустым*) символом (например, греческой буквой λ или знаком _ ).

Каретка всегда расположена над (под) некоторой ячейкой ленты. Она может считывать и записывать символы, стирать их (заменять пустым символом), а также перемещаться вдоль ленты. Машина в каждый такт работы находится в одном из внутренних состояний, образующих конечное множество – **внутренний алфавит**:

$$\boldsymbol{Q} = \{q_0, q_1, q_2, \ldots q_z\}.$$

Особо выделяют начальное $q_0$ и конечное $q_z$ состояния МТ.

Каретка машины Тьюринга может:

- сдвигаться вдоль ленты на одну секцию ВЛЕВО;
- сдвигаться вдоль ленты на одну секцию ВПРАВО;
- записывать в секцию ленты символ внешнего алфавита;
- стирать символ из секции ленты;
- определять наличие (отсутствие) символа внешнего алфавита в секции;
- переходить в одно из состояний внутреннего алфавита.

## Работа МТ

Элементарный шаг работы машины Тьюринга заключается в следующем. Каретка считывает символ, записанный в текущей ячейке, и, в зависимости от своего состояния и прочтенного символа, переходит в новое состояние и реализует команду, в которой указано, какой символ записать в текущую ячейку и какое движение совершить. После выполнения команды машина готова к реализации следующего шага.

**Работа МТ задается набором правил вида** *(в обозначениях, принятых в лекциях)*:

$$\mathbf{q_i}\ \boldsymbol{a}_\mathbf{j} \rightarrow \boldsymbol{a}_\mathbf{j}'\ \mathbf{d_k}\ \mathbf{q_i}'$$

$\mathbf{q_i}$ = номер текущего состояния МТ

$\boldsymbol{a}_\mathbf{j}$ = текущий символ (обозреваемый кареткой)

$\boldsymbol{a}_\mathbf{j}'$ = новый символ, записываемый на ленту вместо $\boldsymbol{a}_\mathbf{j}$

$\mathbf{q_i}'$ = новое состояние, в которое переходит МТ после записи символа $\boldsymbol{a}_\mathbf{j}'$

$\mathbf{d_k}$ = направление, в котором сдвигается каретка МТ с помощью лентопротяжного механизма (**Л** или **L** – влево, **П** или **R**– вправо, **М** или **S** - остается на месте)

Правила работа МТ можно записывать в виде таблицы:

*Столбцы соответствуют символам внешнего алфавита A*

*Строки соответствуют внутренним состояниям МТ*

| | _ | $a_1$ | $a_2$ | . . . | | | | $a_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | | | | | | | | |
| $q_1$ | | | | | | | | |
| . . . | | | | | | | | |

В ячейках таблицы записывают правила: $\boldsymbol{a}_\mathbf{j}'\ \mathbf{d_k}\ \mathbf{q_i}'$ соответствующие комбинациям $\mathbf{q_i}\ \boldsymbol{a}_\mathbf{j}$. Для каждой возможной комбинации $\mathbf{q_i}\ \boldsymbol{a}_\mathbf{j}$ имеется ровно одно правило. Каждой непустой клетке таблицы соответствует правило, а пустая клетка означает, что в данном состоянии данный символ никогда не встречается, т.е. правило не требуется.

## Конструирование МТ

Заметим, что подходы к решению задач в алгоритмических системах Поста и Тьюринга различны. Если, по Посту, решить задачу – это значит написать текст программы для машины Поста, то по Тьюрингу, решить задачу – это значит, руководствуясь идеей задачи, сконструировать (построить) подходящую для данного конкретного случая машину Тьюринга.

Конкретная машина Тьюринга задается перечислением элементов множеств $A$ и $Q$ и набором правил. Поскольку различных множеств $A$ и $Q$ бесконечно много, то и конкретных МТ тоже бесконечно много.

Полное состояние машины Тьюринга называется **конфигурацией** и включает в себя состояние каретки, состояние ленты и положение каретки. Перед началом работы на пустую ленту записывается исходное слово $\alpha$ (в алфавите $A$), каретка устанавливается под первым символом слова $\alpha$. Поскольку в каждой конфигурации применимо только одно правило, то начальная конфигурация однозначно определяет всю последующую работу машины Тьюринга.

Рассмотрим некоторые задачи.

**Задача 1. Добавление единицы.** Договоримся целое неотрицательное число $k$ записывать в виде $k$+1 подряд идущих одинаковых символов, например X. В начальной конфигурации каретка находится под крайней слева непустой секцией. Требуется построить МТ, которая увеличит данное число на единицу.

Внешний алфавит: $A = \{\ \_\ ,\ \mathrm{X}\ \}$.

Внутренний алфавит: $Q = \{\ q_0\ ,\ q_z\ \}$.

Машина, решающая поставленную задачу полностью задается таблицей:

| | _ | X |
|---|---|---|
| $q_0$ | X М $q_z$ | X П $q_0$ |
| $q_z$ | | |

*Проследите за работой этой машины самостоятельно.*

*Сконструируйте данную машину в эмуляторе*

**Задача 2. Добавление единицы.** Целое неотрицательное число *k* запишем в обычном десятичном представлении. В начальной конфигурации каретка находится под крайней слева непустой секцией. Требуется построить МТ, которая увеличит данное число на единицу.

Например, если дано число 2099, то должно получиться число 2100.

Внешний алфавит: $A = \{ \_, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$.

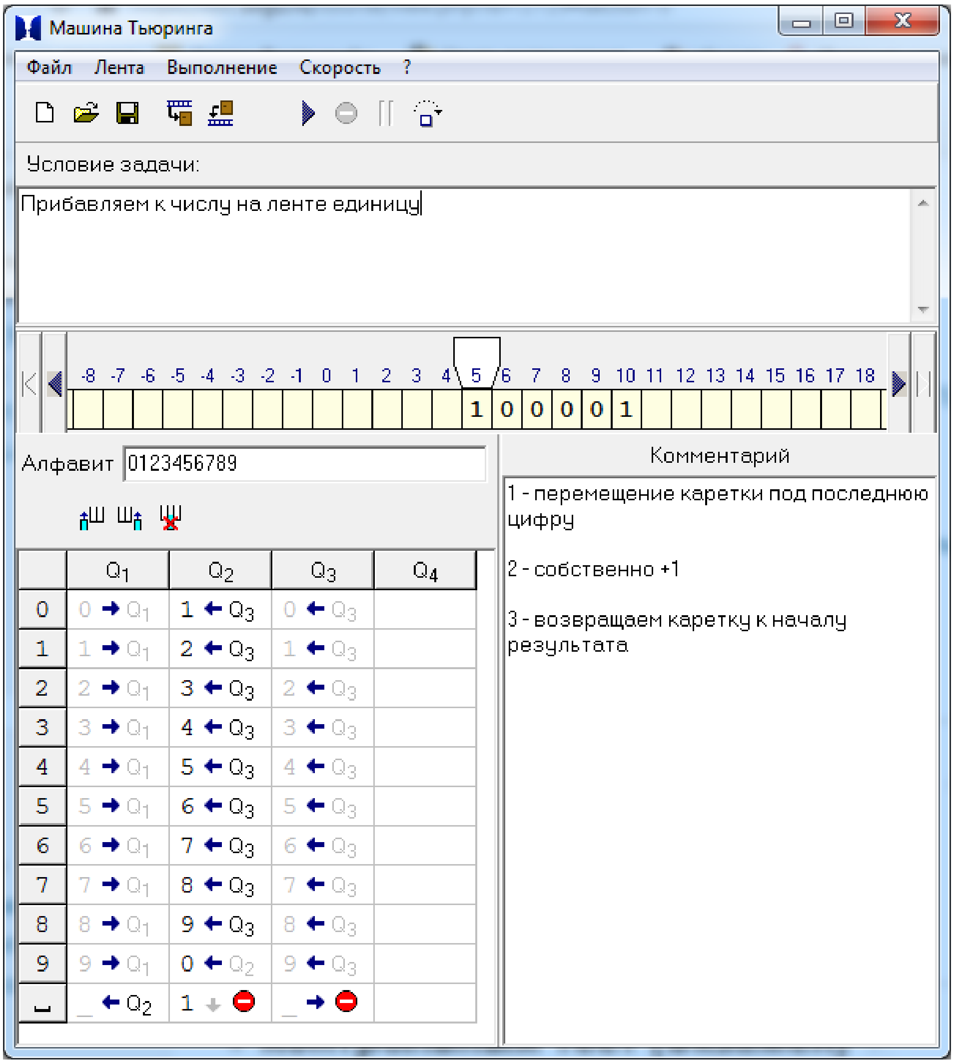
Внутренний алфавит: $Q = \{ q_0, q_1, q_z \}$.

Зададим систему правил работы машины.

| | _ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | _ L q1 | 0 R q0 | 1 R q0 | 2 R q0 | 3 R q0 | 4 R q0 | 5 R q0 | 6 R q0 | 7 R q0 | 8 R q0 | 9 R q0 |
| $q_1$ | 1 S qz | 1 S qz | 2 S qz | 3 S qz | 4 S qz | 5 S qz | 6 S qz | 7 S qz | 8 S qz | 9 S qz | 0 L q1 |

*Проследите за работой этой машины самостоятельно.*

Решение в эмуляторе МТ приведено на рисунке.



**Задача 3. Вычитание единицы.** Целое положительное число $k$ запишем в обычном десятичном представлении. В начальной конфигурации каретка находится под крайней слева непустой секцией. Требуется построить МТ, которая уменьшит данное число на единицу.

Например, если дано число 100, то должно получиться число 99.

Внешний алфавит: $A$ = { _, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Внутренний алфавит: $Q = \{q_0 , q_1 , q_2 , q_z \}$.

Зададим систему правил работы машины.

| | _ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | _ L q1 | 0 R q0 | 1 R q0 | 2 R q0 | 3 R q0 | 4 R q0 | 5 R q0 | 6 R q0 | 7 R q0 | 8 R q0 | 9 R q0 |
| $q_1$ | _ R q2 | 9 L q1 | 0 S qz | 1 S qz | 2 S qz | 3 S qz | 4 S qz | 5 S qz | 6 S qz | 7 S qz | 8 S qz |
| $q_2$ | | _ S qz | | | | | | | | | |

*Проследите за работой этой машины самостоятельно.*

*Сконструируйте данную машину в эмуляторе*

**Задача 4. Вычитание единицы.** Построить МТ, которая будет вычитать единицу из целого неотрицательного числа $k$, записанного в десятичном представлении. *Самостоятельно сконструируйте данную машину в эмуляторе*

**Задача 5. Замена символов.** На ленте последовательность символов *a*, *b*, *c*. Построить МТ, которая заменит все символы *a* на *b*, символы *b* на *c*, символы *c* на *a*.

Например, если дано: *abccabbabacc*, то должно получиться *bcaabccbcbaa*.

Внешний алфавит: $A$ = {_, *a*, *b*, *c*}.

Внутренний алфавит: $Q = \{q_0, q_z\}$.

Зададим систему правил работы машины.

| | _ | *a* | *b* | *c* |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | _ S qz | *b* R q0 | *c* R q0 | *a* R q0 |

*Проследите за работой этой машины самостоятельно.*

*Сконструируйте данную машину в эмуляторе*

## Тезис Тьюринга

Конфигурация машины Тьюринга полностью описывается тройкой $\alpha_1 q_i \alpha_2$, где $q_i$ – текущее состояние машины, $\alpha_1$, $\alpha_2$ – слова на ленте слева и справа от каретки. Слева от $\alpha_1$ и справа от $\alpha_2$ лента пуста.

Поскольку начальная конфигурация машины однозначно определяет всю последовательность ее дальнейших конфигураций, то машине Тьюринга $M$ можно поставить в соответствие функцию $f_M(x)$. Эту функцию определим следующим образом: если начав с конфигурации $q_0\alpha$ машина $M$ останавливается в конфигурации $\gamma q_z \beta$, то считают, что $f_M(\alpha) = \beta$. Если же, начав с конфигурации $q_0\alpha$ машина $M$ не попадает в заключительное состояние $q_z$, то считают, что значение $f_M(\alpha)$ не определено (как не определено, например, деление на ноль или *log* 0).

Машина $M$ может вычислять функцию $f_M(x_1, x_2, \dots x_n)$ от нескольких переменных, в этом случае исходное слово $\alpha$ имеет вид: $\alpha_1/\alpha_2/\dots/\alpha_n$ , где / – разделитель, входящий во внешний алфавит машины и отделяющий одну переменную от другой.

С помощью машин Тьюринга можно вычислять функции самых различных типов: числовые, логические, символьные. В той же статье «О вычислимых числах…» Тьюринг высказал гипотезу (*тезис*) о том, что для любой вычислимой функции (т.е. функции, для которой существует вычисляющий ее алгоритм) можно построить машину Тьюринга, которая ее вычисляет. Это и означает, что машина Тьюринга является универсальной алгоритмической моделью.