

Практическое занятие 3 (19).

Построение СДНФ и СКНФ по таблице истинности. Логические элементы. Построение логических схем

Краткая теория

Канонические формы логических формул. Теорема о СДНФ

Всякая логическая формула определяет некоторую булеву функцию. В то же время ясно, что для всякой булевой функции можно записать бесконечно много формул, ее представляющих. Действительно, если имеется хотя бы одна формула, выражающая булеву функцию, то, используя тождественные преобразования, можно изменить эту формулу, построив сколь угодно сложную равносильную формулу.

Одна из основных задач алгебры логики — нахождение *канонических форм* (т. е. формул, построенных по определенному правилу, канону), а также наиболее простых формул, представляющих булевы функции.

Определение. Если логическая функция выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание переменных, то такая форма представления называется *нормальной*.

Среди нормальных форм выделяют такие, в которых функции записываются единственным образом. Их называют *совершенными*.

Определение. Формулу называют *элементарной конъюнкцией*, если она является конъюнкцией одной или нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания. Одну переменную или ее отрицание считают *одночленной элементарной конъюнкцией*.

Определение. Формула называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ), если она является дизъюнкцией неповторяющихся элементарных конъюнкций. ДНФ записываются в виде $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$, где каждое A_i — элементарная конъюнкция.

Определение. Формула A от k переменных называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ), если:

- 1) A является ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция есть конъюнкция k переменных x_1, x_2, \dots, x_k , причем на i -м месте этой конъюнкции стоит либо переменная x_i , либо ее отрицание;
- 2) все элементарные конъюнкции в такой ДНФ попарно различны.

Теорема 1. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — булева функция от n переменных, не равная тождественно нулю. Тогда существует совершенная дизъюнктивная нормальная форма, выражающая функцию f .

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, на которых значение функции f равно единице.
2. Записываем для каждого отмеченного набора конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, на которых значение функции / равно нулю.
2. Записываем для каждого отмеченного набора дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 0, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

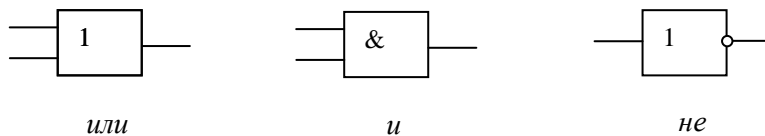
Элементы схемотехники. Логические элементы

Довольно часто при проектировании отдельных узлов компьютера необходимо решить проблему построения логических и электрических схем по заданным функциям, имея лишь описание алгоритма его работы. В этом случае, воспользовавшись указанными данными, можно найти математическую формулу данного узла и на ее основании построить логическую схему.

Конкретный вид электрической схемы, использованной для реализации заданной логической функции, как правило, не имеет существенного значения.

Техническое устройство, реализующее логическую операцию, может рассматриваться просто как **логический элемент**, внутренняя структура которого не конкретизируется.

На схемах логические элементы изображаются следующим образом:



Сложные логические (принципиальные, функциональные) схемы можно конструировать из логических элементов, используя основные понятия и формулы булевой алгебры. Обозначим входные сигналы буквами, сформируем логическую формулу и максимально упростим ее. Затем конструируем соответствующую схему, заменяя каждую логическую операцию соответствующим логическим элементом.

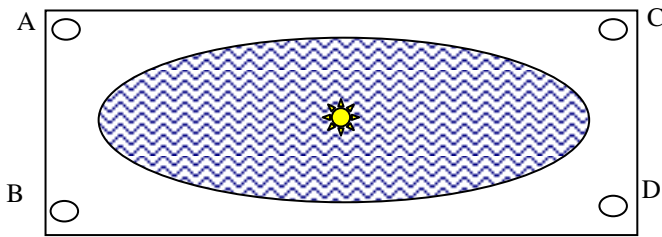
ЗАДАНИЕ 1 (по вариантам). Для предложенных функций построить таблицу истинности и построить СДНФ и СКНФ. Постройте логическую схему устройства для реализации логической функции.

Примечание. Упрощать формулу НЕ НАДО.

1	$(A \rightarrow \bar{B}) \leftrightarrow (B(C \rightarrow \bar{A}))$
2	$A(A \rightarrow B)(A \leftrightarrow \bar{C}B)$
3	$(A \rightarrow (B+C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) + (\bar{A} \rightarrow \bar{C}))$
4	$((\bar{A} \leftrightarrow \bar{B} \bar{C}) \leftrightarrow \bar{C}) \rightarrow (\bar{A} + \bar{B} \leftrightarrow C)$
5	$B(((A \bar{B} \rightarrow C) \rightarrow B) \rightarrow (A \bar{C} \leftrightarrow A+B))$
6	$(C \rightarrow (A \leftrightarrow \bar{B} + C)) \rightarrow (A \bar{C} + \bar{B} \leftrightarrow A \bar{B} C)$
7	$((\bar{A} \leftrightarrow \bar{B} \bar{C}) \rightarrow \bar{C}) \rightarrow (\bar{A} + \bar{C} \rightarrow \bar{B})$
8	$((C \bar{B} \leftrightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow (\bar{A} + C \leftrightarrow C)B$
9	$((\bar{A} \leftrightarrow \bar{B} \bar{C}) \rightarrow \bar{C}) \rightarrow (\bar{A} + \bar{C} \leftrightarrow \bar{B})$
10	$((\bar{A} \leftrightarrow \bar{B} \bar{C}) \rightarrow \bar{C}) \rightarrow ((\bar{A} + \bar{B}) \leftrightarrow C)$
11	$A(A \rightarrow B)(A \leftrightarrow \bar{B} \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C \rightarrow \bar{A} \bar{B})$
12	$(A \rightarrow (B+C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) + (\bar{A} \rightarrow \bar{C}))$

ЗАДАНИЕ 2. По описанию устройства построить таблицу состояний, по полученной таблице построить СДНФ и СКНФ. Построить логическую схему данного устройства.

Задача 2.1. Необходимо разработать устройство для включения/выключения света в бассейне (см. рис.)



Принцип работы: любой выключатель A, B, C, D включает свет, если темно, и выключает освещение, если лампочка горит.

Постройте таблицу состояний данного устройства подсветки. По таблице истинности постройте СДНФ и СКНФ. Постройте логическую схему устройства.

Задача 2.2. Голосование.

Три человека участвуют в тайном голосовании. Составить таблицу состояний (истинности) устройства, регистрирующего результаты тайного голосования большинством голосов.

По таблице истинности постройте СДНФ и СКНФ. Постройте логическую схему устройства.

Задача 2.3. Штангисты.

Для оповещения зрителей, наблюдающих за соревнованиями штангистов, изготовлено табло "ВЕС ВЗЯТ ПРАВИЛЬНО". Табло загорается по сигналу 1, который выдает устройство, обрабатывающее решение трех судей A, B, C. Судья A - старший. Если судья считает, что спортсмен выполнил упражнение без ошибок, то он нажимает кнопку, подавая в устройство сигнал "1".

Сигнал на подсвечивание табло выдается только тогда, когда все судьи или два из них нажали кнопки, при этом одним обязательно должен быть старший судья A.

Постройте таблицу состояний данного устройства подсветки. По таблице истинности постройте СДНФ и СКНФ. Постройте логическую схему устройства.