

Практическое занятие 2 (18).

Логические операции, упрощение логических формул.

Использование алгебры логики для анализа и упрощения переключательных схем.

Решение логических задач

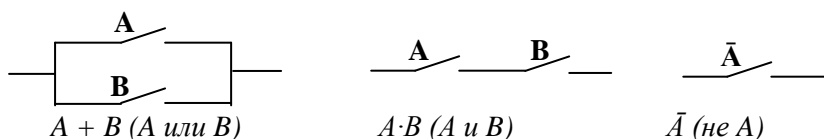
Для преобразования (упрощения) логических (булевых) выражений полезно знать следующие свойства.

1. Законы коммутативности $A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$	5. Законы идемпотентности $A + A = A$ $A \cdot A = A$
2. Законы ассоциативности $A + (B + C) = (A + B) + C$ $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	6. Закон двойного отрицания $\overline{\overline{A}} = A$
3. Законы дистрибутивности $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	7. Инволюция $A \rightarrow B = \overline{A} + B$ $A \leftrightarrow B = (A \cdot B) + (\overline{A} \cdot \overline{B})$ $A \leftrightarrow B = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$
4. Законы де Моргана $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	8. Законы, включающие 0 и 1 $A + \overline{A} = 1, \quad A \cdot \overline{A} = 0$ $A + 1 = 1, \quad A \cdot 1 = A$ $A + 0 = A, \quad A \cdot 0 = 0$ $\overline{1} = 0$

Закон двойственности. Если в каком-либо тождестве все операции сложения (+) заменить на умножение (\cdot) и наоборот, а все встречающиеся в тождестве символы 0 заменить на 1 и наоборот, то полученное выражение будет тождеством, двойственным данному.

Использование булевых функций для анализа и упрощения переключательных (релейно-контактных) схем

Переключателям, соединенным параллельно соответствует логическое +, переключателям, соединенным последовательно соответствует логическое *. Если два переключателя работают так, что один из них замкнут, когда другой разомкнут, и наоборот, то им ставятся в соответствие высказывания A и \overline{A} .



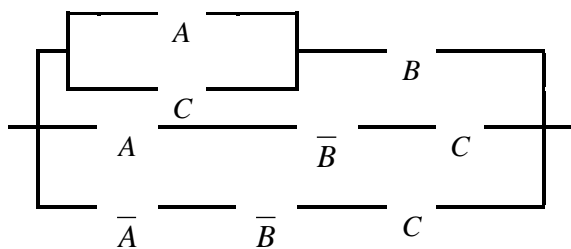
Каждой переключательной (релейно-контактной) схеме соответствует сложное высказывание, истинное тогда и только тогда, когда схема проводит ток. Это высказывание можно исследовать методами булевой алгебры. Если соответствующее схеме выражение можно упростить, то и схема допускает аналогичное упрощение. Естественно считать из двух схем более простой ту, которая содержит меньше переключателей.

ЗАДАНИЕ 1. Упростите формулы:

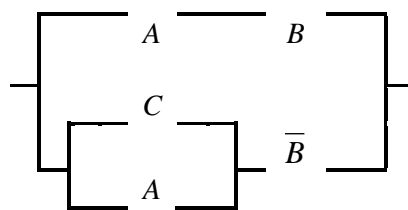
- 1) $A + A \cdot B = \dots$
- 2) $A \cdot (A + B) = \dots$
- 3) $\overline{A} \cdot (A + B) = \dots$
- 4) $A + \overline{A} \cdot B = \dots$

ЗАДАНИЕ 2. Упростите переключательную схему, используя средства булевой алгебры (по вариантам).

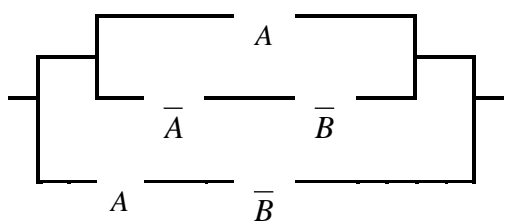
Вариант 1.



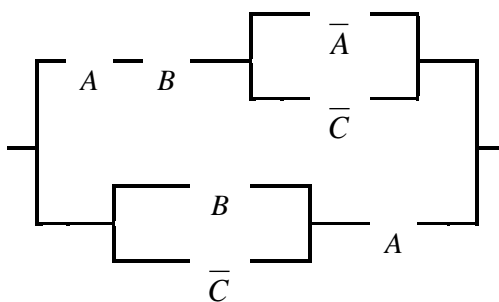
Вариант 2.



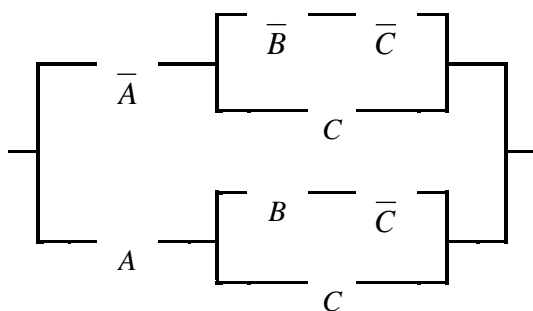
Вариант 3.



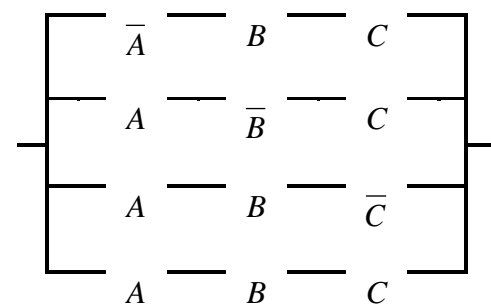
Вариант 4.



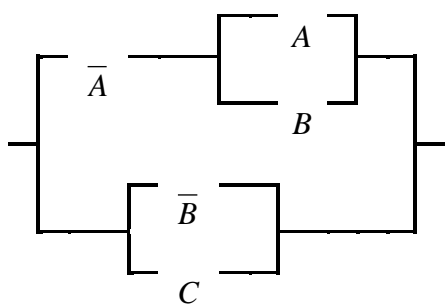
Вариант 5.



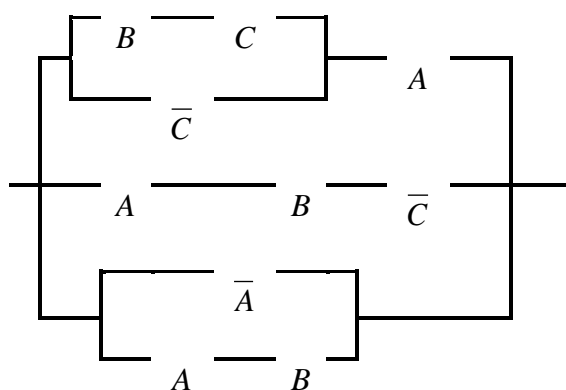
Вариант 6.



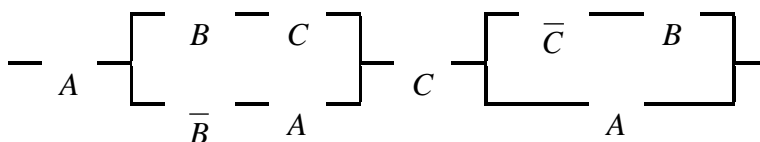
Вариант 7.



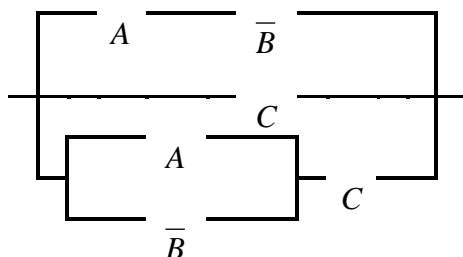
Вариант 9.



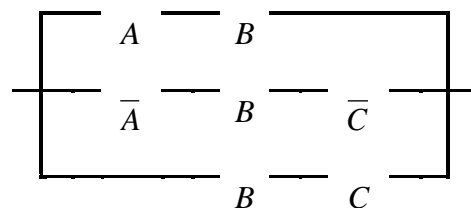
Вариант 8.



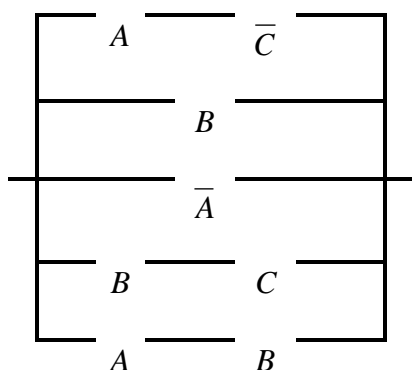
Вариант 10



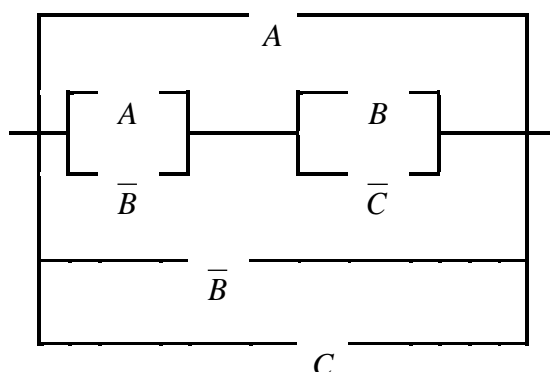
Вариант 11



Вариант 12



Вариант 13



ЗАДАНИЕ 3. Составьте одну из наиболее простых переключательных цепей, реализующую высказывание: $(\bar{A} + \bar{B}) \cdot ((\bar{C} + \bar{B}) \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{B}$

ЗАДАНИЕ 4. Постройте электрическую цепь (переключательную схему) для тайного голосования, если оно проводится комиссией из трех рядовых членов и председателя по следующим правилам:

- каждый член комиссии при голосовании «за» нажимает кнопку;
- лампочка загорается в том случае, если предложение набрало большинство голосов
- или число голосов «за» и «против» равное, но «за» подан голос председателя.

Применение логических формул для решения логических содержательных задач

Логические задачи можно решать как с помощью таблиц истинности, так и путем упрощения формулы.

Отметим, что метод, основанный на построении и анализе таблиц истинности, имеет ограниченное применение при увеличении количества переменных, поскольку усложняется построение и анализ этой таблицы.

Алгоритм решения логических задач с помощью построения формул

- 1) Символизируйте условие задачи - выделите и обозначьте простые высказывания (давайте обозначения соответствующие смыслу высказывания).
- 2) Запишите условие в виде системы логических уравнений, в правых частях которых "1".
- 3) Составьте логическую функцию, соответствующую вашей задаче.
- 4) Упростите логическую функцию задачи, используя известные вам свойства логических операций,
- 5) Проанализируйте результат и запишите ответ задачи на естественном языке.

Пример. Определить, кто из подозреваемых участвовал в преступлении, если известно:

- 1) Если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал.
- 2) Если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.

Решение.

Выделим и обозначим простые высказывания:

И - Иванов участвовал в преступлении;

П - Петров участвовал в преступлении;

С - Сидоров участвовал в преступлении.

Составим истинные высказывания, соответствующие условиям задачи¹.

$$1) (\bar{И} + П) \rightarrow С$$

$$2) \bar{И} \rightarrow \bar{С}$$

Для получения логической функции, в которой связано все, о чем говорится в условии задачи, составим конъюнкцию полученных выражений:

$$F = ((\bar{И} + П) \rightarrow С) \cdot (\bar{И} \rightarrow \bar{С})$$

Осталось упростить формулу и выписать значения простых высказываний, при которых $F=1$.

ЗАДАНИЕ 5. Решите **одну** из предложенных логических задач, используя только средства булевой алгебры.

ЗАДАЧА 1. "ОГРАБЛЕНИЕ"

БРАУНУ, ДЖОНСУ и СМИТУ предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле.

На следствии БРАУН показал, что это преступники были на синем "Бьюике", ДЖОНС сказал, что это был черный "Крайслер", СМИТ утверждал, что это был "Форд Мустанг" и ни в коем случае не синий.

Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет.

Какого цвета был автомобиль и какой марки?

ЗАДАЧА 2. "ВАЛЮТНЫЕ МАХИНАЦИИ"

В нарушении правил обмена валюты подозреваются четыре работника банка – Антипов (А), Борисов (В), Цветков (С) и Дмитриев (D). Известно, что:

- 1) Если А нарушил правила обмена валюты, то и В нарушил
- 2) Если В нарушил, то и С нарушил или А не нарушал
- 3) Если D не нарушал, то А нарушил, а С не нарушал
- 4) Если D нарушил, то и А нарушил

Кто из подозреваемых нарушил правила обмена валюты?

ЗАДАЧА 3. "ЭКСПЕДИЦИЯ"

Для полярной экспедиции из восьми претендентов А, В, С, D, E, F, G, H надо отобрать шесть специалистов: биолога, синоптика, гидролога, радиста, механика, врача. Известно, что работу биолога

¹ Для перевода условия задачи на язык логики используйте таблицу, приведенную в занятии 1.

могут выполнять Е и G, гидролога - В и F, синоптика - F и G, радиста - С и D, механика - С и Н, врача – А и D.

Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность.

Кого и кем следует взять в экспедицию, если известно, что: F не поедет без В; D не поедет без Н и без С; С не может ехать вместе с G; А не может ехать вместе с В.

ЗАДАЧА 5. "РАСПИСАНИЕ"

При составлении расписания на определенный день в определенном классе преподавателями были высказаны просьбы:

- 1) математика, желающего иметь первый или второй урок;
- 2) историка, желающего иметь первый или третий урок;
- 3) литератора, желающего иметь второй или третий урок.

Составить расписание, удовлетворяющее всем просьбам. Сколькими способами это можно сделать?

ЗАДАЧА 6. "НАХОДКА"

Алеша, Боря и Гриша нашли в земле древний сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения:

Алеша: "Это сосуд греческий и изготовлен в V веке."

Борис: "Это сосуд финикийский и изготовлен в III веке."

Гриша: "Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке."

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

ЗАДАЧА 7. "СТУДЕНТКИ"

На вопрос о возрасте четырех студенток - Анны, Марии, Нины и Оли - их подруги ответили:

- 1) Анне - 23 года, Марии - 22 года;
- 2) Нине - 20 лет, Анне - 22 года;
- 3) Оле - 22 года, Нине - 19 лет.

Известно, что ровесниц среди этих девушек нет и в каждом ответе одна часть верна, а другая - неверна. Найдите возраст каждой девушки.

ЗАДАЧА 8. "ОЛИМПИАДА"

Шесть школьников С, D, Н, F, G, Т ходили на олимпиаду. Двое из них решили задачи. На вопрос, кто решил, они ответили:

- 1) С и G ; 2) D и Т ; 3) Т и С ; 4) D и F ; 5) Н и С.

В четырех ответах одна часть ответов верна, другая - неверна; в одном из ответов обе части неверны. Кто из учеников решил задачи на олимпиаде ?

ЗАДАЧА 9. "ВЕЛОГОНКА"

В велогонке участвовали и заняли пять первых мест пять учащихся. На вопрос, кто из них какое место занял, ребята ответили:

- 1) Сережа - второе, Коля - третье;
- 2) Надя - третье, Толя - пятое;
- 3) Толя - первое, Надя - второе;
- 4) Сережа - второе, Ваня - четвертое;
- 5) Коля - первое, Ваня - четвертое.

В каждом ответе одна часть верна, другая - неверна. Кто какое место занял ?

ЗАДАЧА 10. "ТРЕНЕР"

Пять пловцов - Андрей, Борис, Коля, Дима, Эдик – были членами одного спортивного клуба. Однажды в отсутствие тренера они устроили между собой соревнования. Когда же тренер, вернувшись, спросил об их результатах, то в ответ услышал следующее.

Андрей: Дима занял второе место, а я оказался на третьем.

Борис: Я показал самый лучший результат, а Коля занял второе место.

Коля: Я был третьим, а Борис - последним.

Дима: Я занял второе место, а Эдик вышел на четвертое.

Эдик: Мне удалось опередить лишь одного пловца, а соревнование выиграл Андрей.

Увидев изумленное лицо тренера, ребята признались, что пошутили: в каждом предложении одна часть верна, а другая нет. Тренер принялся ломать голову над тем, как же в действительности закончились соревнования. Помогите ему !

Примечание. Все спортсмены показали разное время.

ЗАДАЧА 11. "ДРУЗЬЯ"

Пятеро друзей - Андрей, Борис, Виктор, Григорий, Дмитрий решили записаться в кружок любителей логических задач. Руководитель кружка предложил им выдержать вступительный экзамен: "Вы должны приходить к нам по возможности больше вечеров, но в разных сочетаниях, соблюдая следующие условия:

- 1) если А приходит вместе с Д, то Б должен присутствовать;
- 2) если Д отсутствует, то Б должен быть, а В пусть не приходит;
- 3) А и В не могут одновременно ни присутствовать, ни отсутствовать;
- 4) если придет Д, то Г пусть не приходит;
- 5) если Б отсутствует, то Д должен присутствовать, но это в том случае, если не присутствует В. Если же В присутствует при отсутствии Б, то Д приходить не должен, а Г должен прийти."

Сколько вечеров и в каком составе друзья могли прийти ?

ЗАДАЧА 12. "ОБЩЕЖИТИЕ"

Четыре приятеля - А, Б, В, Г живут в разных комнатах общежития. На вопрос, где они живут, трое дали по два ответа, из которых один истинный, другой - ложный.

А: "Я живу в первой комнате, Г живет во второй."

Б: "Я живу в третьей комнате, А - во второй."

В: "Я живу во второй комнате, Б - в четвертой."

Кто в какой комнате живет ?

ЗАДАЧА 13. "ШАХМАТЫ"

Кто из студентов А, В, С, D играет, а кто не играет в шахматы, если известно следующее:

- а) если А или В играет, то С не играет;
- б) если В не играет, то играют С и D;
- в) С - играет.

ЗАДАЧА 14. "КИНО"

Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель, хорошо знавший этих ребят, высказал следующие предположения:

- а) Аня пойдет в кино только тогда, когда пойдут Вика и Сергей;
- б) Аня и Сергей пойдут в кино оба или же оба останутся дома;
- в) чтобы Сергей пошел в кино, необходимо, чтобы пошла Вика.

Когда ребята пошли в кино, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два. Кто из ребят ходил в кино?

ЗАДАЧА 15. "ПРИБЫЛЬ"

Три фирмы А, В и С специализирующиеся на производстве и продаже персональных компьютеров, стремились получить максимальную прибыль по итогам работы за год. Экономист, хорошо знавший организацию работ в этих фирмах, высказал следующие предположения:

- 1) фирма А получит максимальную прибыль только тогда, когда получат максимальную прибыль фирмы В и С;
- 2) либо фирмы А и С получают максимальную прибыль одновременно, либо нет;

3) для того, чтобы фирма С получила максимальную прибыль за год необходимо, чтобы и фирма В получила максимальную прибыль.

По завершении года оказалось, что экономист немного ошибся: из трех утверждений истинными оказались только два. Какая из названных фирм получила максимальную прибыль ?

ЗАДАЧА 16. "МАРКИ"

Кто из друзей (Иван, Петр, Алексей, Николай или Борис) коллекционирует марки ? При этом известно, что:

- 1) если Борис коллекционирует марки, то их коллекционируют Иван и Николай;
- 2) если их коллекционирует Иван, то Петр тоже коллекционирует марки;
- 3) из двух друзей (Петра и Алексея) коллекционирует марки только один;
- 4) Алексей лишь в том случае коллекционирует марки, если их коллекционирует Николай;
- 5) по крайней мере, Николай или Борис коллекционирует марки.

ЗАДАЧА 17. "ВАЗА"

Мама, прибежавшая на звон разбившейся вазы, застала всех трех своих сыновей в совершенно невинных позах: Саша, Ваня и Коля делали вид, что происшедшее к ним не относится. Однако футбольный мяч среди осколков явно говорил об обратном.

- Кто это сделал? - спросила мама.

- Коля не бил по мячу, - сказал Саша. - Это сделал Ваня.

Ваня ответил: - Разбил Коля, Саша не играл в футбол дома.

- Так я и знала, что вы друг на дружку сваливать будете, - рассердилась мама. - Ну, а ты что скажешь? - спросила она Колю.

- Не сердись, мамочка! Я знаю, что Ваня не мог этого сделать. А я сегодня еще не сделал уроки, - сказал Коля.

Оказалось, что один из мальчиков оба раза солгал, а двое в каждом из своих заявлений говорили правду.

Кто разбил вазу?

ЗАДАЧА 18. "УРОКИ"

В понедельник в одном из классов должно быть проведено 4 урока - по математике, физике, информатике и биологии. Учителя высказали свои пожелания для составления расписания. Учитель математики хочет иметь первый или второй урок, учитель физики - второй или третий урок, учитель информатики - первый или четвертый, учитель биологии - третий или четвертый.

Какие при этих условиях могут быть варианты расписания? (перечислить все возможные варианты).

Примем обозначения: М - математика, Ф - физика, И - информатика Б - биология.

ЗАДАЧА 18. "УРОКИ-2"

В понедельник в одном из классов должно быть проведено 7 уроков - по математике, физике, информатике, биологии, английскому, географии и химии. Учителя высказали свои пожелания для составления расписания. Учитель математики хочет иметь первый или второй урок, учитель физики - второй или третий урок, учитель информатики - первый или четвертый, учитель биологии - третий или четвертый, учитель географии - пятый или шестой, учитель английского - шестой или седьмой, учитель химии - пятый или седьмой.

Какие при этих условиях могут быть варианты расписания? (перечислить все возможные варианты).

Примем обозначения: М - математика, Ф - физика, И - информатика Б - биология, Г - география, А - английский, Х - химия.

ЗАДАЧА 19 (*). "УЧЕБНЫЙ ПЛАН"

Рассмотрим упрощенный учебный план, где неделя включает всего три учебных дня - понедельник, среду и пятницу. Каждый день содержит не более трех пар учебных часов. В течение недели учащиеся

должны иметь три пары учебных часов по математике, две - по физике и по одной - по химии, истории и физкультуре.

При этом:

- 1) математик настаивает, чтобы его часы никогда не были последними и по крайней мере два раза - первыми;
- 2) физик желает, чтобы его часы также не были последними; по крайней мере один раз он хочет иметь первую пару часов; в среду он должен быть свободен первые два часа, а в пятницу, напротив, он может работать только первые два часа;
- 3) историк может преподавать лишь в понедельник в течение первых четырех часов или в среду в течение третьего и четвертого часов; кроме того, он не желает, чтобы его занятия непосредственно предшествовали физкультуре;
- 4) химик настаивает, чтобы его занятия проходили не в пятницу и не в те дни, когда учащиеся занимаются физикой;
- 5) занятия по физкультуре проводятся на стадионе, и поэтому они должны быть последними в свой день; кроме того, физкультурник в пятницу занят на другой работе;
- 6) в течение каждого учебного дня не должно быть больше двух часов занятий по одному и тому же предмету;
- 7) свободные от занятий два часа в рамках учебной недели из $3 \times 3 = 9$ пар часов (из которых заняты лишь $3+2+1+1+1=8$ пар часов) должны приходиться на последнюю пару часов в пятницу или первую пару часов в понедельник.

Как можно составить расписание с соблюдением всех поставленных условий ?

Литература

1. ДЕПМАН И.Я. Рассказы о старой и новой алгебре. - Л., 1967. с. 103-139.
2. ДЕПМАН И.Я. Первое знакомство с математической логикой. - Л., 1963.
3. КУТАСОВ А.Д. Элементы математической логики. Пособие для уч-ся 9-10 кл. - М., 1977.