Практическое занятие 1.

ТЕМА. Введение в алгебру высказываний. Логические операции. Перевод и запись выражений естественного языка на язык алгебры высказываний. Таблицы истинности.

Элементы математической логики

История логики насчитывает около двух с половиной тысячелетии. На первом этапе до начала XX века она развивалась очень медленно. Перемены, происшедшие в логике приблизили ее к реальному мышлению и тем самым к человеческой деятельности. Первоначально математическая логика рассматривалась как базис для логического обоснования различных областей математики. В последние три десятилетия математическая (символическая) логика находит применение во многих областях, в частности, в кибернетике, теории электронных вычислительных машин, теории алгоритмов, электротехнике.

Математическая логика рассматривает схематизированные и в известной степени идеализированные понятия. В логических задачах исходными данными являются не только числа, но и сложные и весьма запутанные высказывания. Во многих случаях необходима ЭВМ для решения логических задач. Умение использовать логические операции повышает эффективность программирования. В самой математической логике немало задач, решение которых можно найти с помощью ЭВМ. Одним из примеров таких задач является поиск тождественно истинных высказываний (тавтологий) в алгебре высказываний. Основным разделом математической логики, лежащим в основе других ее разделов, является логика высказываний.

Элементы логики высказываний

Рассмотрим некоторый класс объектов и установим свойства этих объектов, а также отношения и операции над ними.

Под ***высказыванием*** (суждением) будем понимать повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно.

Простые (элементарные) высказывания являются простейшим объектом логики высказываний. Рассмотрим несколько примеров простых высказываний:

A = "Некоторые свойства мышления не моделируются средствами современной кибернетики",

B = "Верста больше километра",

C = " Число 100 больше числа 10".

Примеры предложений, не являющихся высказываниями:

D = Посмотри в окно

E = “x – 5 > 0”

В последнем случае предложение E не является высказыванием, т.к. для одних значений x это выражение будет истинными в то же время для других значений x – ложным.

В двузначной логике единственный способ оценки сводится к утверждению или отрицанию истинности высказывания. В такой логике есть смысл абстрагироваться от различий между суждением и высказыванием и рассматривать их как синонимы.

Пользуясь простыми высказываниями можно образовывать *сложные или составные высказывания*, в которых простые входят в качестве элементарных составляющих. Таким образом, в отличие от сложного, простое высказывание не поддается расчленению на высказывания. В образовании сложных высказываний используются слова: *и, или, тогда и только тогда, когда (в том и только в том случае), если ... , то ... , нет.*

Рассмотрим несколько примеров сложных высказываний.

1) Если идет дождь, то солнце не светит. 2) Если ветер дует, то нет дождя.

При первоначальном изучении логики высказываний обращают внимание не на содержание, а на истинность или ложность высказываний. Основная задача логики высказываний заключается в том, чтобы на основании истинности или ложности простых высказываний определить истинность или ложность сложных высказываний. Среди сложных высказываний можно выделить соединительные, разделительные, условные, эквивалентные и высказывание с внешним отрицанием.

Если высказывание истинно при всех значениях входящих в него переменных, то такое высказывание называется *тождественно истинным* или *тавтологией*.

Если высказывание ложно при всех значениях входящих в него переменных, то такое высказывание называется *тождественно ложным*.

Логические операции часто называют логическими связками и для них используется система символических обозначений. Простые высказывания будем обозначать большими буквами A, B, C и т.д., а значения истинности буквами I (либо 1) для "истинно" и L (либо 0) для "ложно". Для булевых переменных, то есть переменных, которые принимают только два значения, называемые "истиной" (TRUE) и "ложью" (FALSE) и обозначаемые соответственно 1 и 0, определены следующие логические операции (здесь приведены различные обозначения, встречающиеся в литературе):

1	$\neg$, $\overline{}$	логическое НЕ (***отрицание***)
2	$\times$, $\wedge$, & , и , AND	логическое И (***произведение***)
3	+ , $\vee$, или , OR	логическое ИЛИ (***сумма***)
4	$\oplus$, $\forall$	логическое исключающее ИЛИ
5	$\rightarrow$	импликация
6	$\leftrightarrow$, =	эквиваленция (двойная импликация)

ЗАДАНИЕ 1. Определите, какие из нижеприведенных фраз являются высказываниями с точки зрения алгебры логики. Определите значение высказываний (истина или ложь**).**
а) Число 8456 является совершенным.
б) Без труда не выловишь и рыбку из пруда.
в) Как хорошо быть генералом!
г) Революция может быть мирной и немирной.
д) Зрение бывает нормальное, или у человека имеется дальнозоркость или близорукость.
е) Познай самого себя.
ж) Не может быть, что ни один человек не дышит жабрами.
з) Талант всегда пробьет себе дорогу.
и) Некоторые животные мыслят.
к) Информатика, в частности, изучает алгоритмы.
л) Всякая истина является конкретной.
м) Это утверждение ложно.

Ответ:
Истинные высказывания - ________________________________
Ложные высказывания - ______________________________
Не являются высказываниями - _________________________

Перевод и запись выражений естественного языка на язык алгебры логики

Аппарат алгебры логики можно с успехом использовать для решения логических содержательных задач, отличающихся сложностью и запутанностью исходных данных. При решении таких задач с помощью рассуждений наши высказывания не могут до конца выразить всю полноту мысли и не обладают достаточной ясностью. **Поэтому, если предварительно перевести все высказывания в символику алгебры логики, а затем использовать аппарат этой алгебры, то можно получить четкое решение задачи с однозначный ответом.** Однако прежде чем воспользоваться этим методом, необходимо научиться правильно переводить высказывания естественного языка на символический язык алгебры логики.

Для перевода высказываний с естественного языка на язык логики используйте следующую таблицу

	Операция	**Естественный язык**
1	Отрицание	*не А; неверно, что А*
2	Логическое произведение А·В	*А и В; как А, так и В;* *А вместе с В;* *А несмотря на В;* *А в то время, как В*
3	Логическая сумма А+В	*А или В;* *А или В или оба*
4	Импликация А→В	*если А, то В; В если А;* *В необходимо для А;* *А достаточно для В;* *А только тогда, когда В;* *В тогда, когда А;* *все А есть В*
5	Эквиваленция А↔В	*А эквивалентно В;* *А необходимо и достаточно для В;* *А тогда и только тогда, когда В;* *А если и только В*

Пример 1. Перевести на язык алгебры логики следующее высказывание: *"Я поеду в Москву и если встречу там друзей, то мы интересно проведем время"*.

Решение.

Введем следующие простые высказывания:

М - *я поеду в Москву*;
В - *встречу там друзей*;
И - *интересно проведем время*.

Исходное высказывание будет иметь вид: М&(В → И)

ЗАДАНИЕ 2. В следующих высказываниях выделите простые, обозначив каждое из них подходящей буквой; запишите на языке алгебры логики с помощью введенных обозначений и знаков логических операций каждое составное высказывание (см. пример 1):

а) Число 376 четное и трехзначное.
б) Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.
в) Новый год мы встретим на даче либо на Красной Площади.
г) Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
д) Если 14 октября будет солнечным, то зима будет теплой.
е) Земля имеет форму шара, который из космоса кажется голубым.
ж) На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, а также писали проверочную работу.
з) Если вчера было воскресенье, то Дима вчера не был в школе и весь день гулял.
и) Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то число делится на 3.
к) Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.
л)

ЗАДАНИЕ 3. Левая колонка приведенной ниже таблицы содержит основные логические союзы (связки), с помощью которых в естественном языке строятся сложные (составные) высказывания.

Заполните правую колонку таблицы названиями наиболее подходящих логических операций.

В естественном языке	В логике
… и …	
… или …	
Неверно, что …	
… хотя …	
… в том и только в том случае …	
… но …	
… а …	
Если …, то …	
… однако …	
… тогда и только тогда, когда …	
Либо …, либо …	
… необходимо и достаточно …	
Из … следует …	
… влечет …	
… равносильно …	
… необходимо …	
… достаточно …	

Обратите внимание. При построении отрицания к простому высказыванию либо используется речевой оборот «неверно, что», либо отрицание строится к сказуемому, тогда к сказуемому добавляется частица «не», при этом слово «все» заменяется словом «некоторые» и наоборот.

ЗАДАНИЕ 4. Постройте отрицания следующих высказываний.

а) Сегодня в театре идет опера «Евгений Онегин».
б) Каждый охотник желает знать, где сидит фазан.
в) Число 1 есть простое число.
г) Число 1 – составное.
д) Натуральные числа, оканчивающиеся цифрой 0, являются простыми числами.
е) Неверно, что число 3 не является делителем числа 198.
ж) Коля решил все задания контрольной работы.
з) Неверно, что любе число, оканчивающееся цифрой 4, делится на 4.
и) Во всякой школе некоторые ученики интересуются спортом.
к) Некоторые млекопитающие не живут на суше.

ЗАДАНИЕ 5. Являются ли отрицаниями друг друга следующие пары предложений? Ответ обоснуйте.

а) Он – мой друг. Он – мой враг.
б) Большой дом. Небольшой дом.
в) Большой дом. Маленький дом.
г) $X > 2$. $X < 2$.

ЗАДАНИЕ 6. Пусть есть следующие высказывания:
P = «*Ане нравятся уроки математики»,* **Q = «***Ане нравятся уроки химии».*

Выразите следующие формулы на естественном языке.

а) $p \,\&\, q$; г) $p \vee q$; ж) $\overline{p \,\&\, q}$; к) $p \to q$;
б) $\overline{p} \,\&\, q$; д) $p \vee \overline{q}$; з) $\overline{p \vee q}$; л) $p \to \overline{q}$;
в) $p \,\&\, \overline{q}$; е) $\overline{p} \vee \overline{q}$; и) $\overline{p \,\&\, \overline{q}}$; м) $\overline{p \to q}$.

Если значения сложных высказываний совпадают на всех возможных наборах значений входящих в них переменных, то такие высказывания называют *равносильными*, *тождественными*, *эквивалентными*.

ЗАДАНИЕ 7. Постройте таблицы истинности для каждой пары высказываний. Какие из них являются эквивалентными?

а) $A \vee B$; $B \vee A$;
б) $A \vee (B \vee C)$; $(A \vee B) \vee C$;
в) $A \vee (B \,\&\, C)$; $(A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$;
г) $A \vee A \,\&\, B$; A;
д) $A \Rightarrow B$; $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;
е) $A \Rightarrow B \,\&\, A$; $A \vee B$;
ж) $A \,\&\, B$; $B \,\&\, A$;
з) $A \,\&\, (B \,\&\, C)$; $(A \,\&\, B) \,\&\, C$;
и) $A \,\&\, (B \vee C)$; $(A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$;
к) $A \,\&\, (A \vee B)$; A;
л) $A \Leftrightarrow B$; $(A \Rightarrow B) \,\&\, (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$;
м) $A \Rightarrow B$; $A \vee \overline{B}$.

ЗАДАНИЕ 8. Постройте таблицы истинности следующих сложных высказываний и определите, являются ли эти высказывания тождественно истинными:

а) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;
б) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
в) $A \,\&\, B \Rightarrow A$;
г) $A \,\&\, B \Rightarrow B$;
д) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \,\&\, C))$;
е) $A \Rightarrow (B \vee A)$;
ж) $B \Rightarrow (B \vee A)$;
з) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$;
и) $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$;
к) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \,\&\, B)$;
л) $(\overline{A \Rightarrow B}) \Rightarrow (A \Rightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A})$.