Основы алгебры логики

Прежде всего, начнем с разбора названия самого предмета, а именно выясним, каково значение алгебры, логики, а затем алгебры логики.

Алгебра – это наука, которая изучает множество некоторых элементов и действия (операции) над ними. Если элементы алгебры – натуральные числа, а операции – сложение и умножение, то это алгебра натуральных чисел. Действия с направленными отрезками (векторами) изучает векторная алгебра.

Термин «логика» происходит от древнегреческого “logos”, означающего «слово, мысль, понятие, рассуждение, закон».

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ является составной частью одного из современных быстро развивающихся разделов математики – математической логики. Математическая логика применяется в информатике, позволяет цифровые устройства обработки информации, моделировать простейшие мыслительные процессы. Одним из приложений алгебры высказываний – решение логических задач.

Алгеброй логики называется аппарат, который позволяет выполнять действия над высказываниями.

Алгебру логики называют также **алгеброй Буля**, или **булевой алгеброй**, по имени английского математика Джорджа Буля, разработавшего в XIX веке ее основные положения. В булевой алгебре высказывания принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, X, Y. В алгебре Буля введены три основные логические операции с высказываниями: умножение, сложение, отрицание. Определены аксиомы (законы) алгебры логики для выполнения этих операций. Действия, которые производятся над высказываниями, записываются в виде логических выражений.

Объекты алгебры высказываний. Операции над высказываниями. Таблицы истинности.

Итак, объектами алгебры высказываний являются высказывания.

Высказывание – это истинное или ложное повествовательное предложение.

Повествовательное предложение, в котором говорится об одном единственном событии, называется простым высказыванием.

Например, предложение «Луна – спутник Земли» есть простое высказывание, предложение «Не сорить!» не является высказыванием.

Высказывания обозначаются большими буквами латинского алфавита. Если высказывание A истинно, то пишут $A = 1$, если ложно, то используют запись $A = 0$.

Как и в других алгебрах, в алгебре высказываний над ее объектами (высказываниями) определены действия (логические операции), выполняя которые получают новые высказывания.

Простое логическое выражение состоит из одного высказывания и не содержит логические операции. В простом логическом выражении возможно только два результата — либо «истина», либо «ложь».

Сложное логическое выражение содержит высказывания, объединенные логическими операциями. По аналогии с понятием функции в алгебре сложное логическое выражение содержит аргументы, которыми являются высказывания.

В качестве основных **логических операций** в сложных логических выражениях используются:

• НЕ (логическое отрицание, инверсия);

• ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция);

• И (логическое умножение, конъюнкция).

Логическое отрицание является одноместной операцией, так как в ней участвует одно высказывание. Логическое сложение и умножение — двуместные операции, в них участвует два высказывания. Существуют и другие операции, например операции следования и эквивалентности, правило работы которых можно вывести на основании основных операций.

Все операции алгебры логики определяются **таблицами истинности** значений. Таблица истинности определяет результат выполнения операции для **всех возможны**х логических значений исходных высказываний. Количество вариантов, отражающих результат применения операций, будет зависеть от количества высказываний в логическом выражении, например:

- таблица истинности одноместной логической операции состоит из двух строк: два различных значения аргумента — «истина» (1) и «ложь» (0) и два соответствующих им значения функции;
- в таблице истинности двуместной логической операции — четыре строки: 4 различных сочетания значений аргументов — 00, 01, 10 и 11 и 4 соответствующих им значения функции;
- если число высказываний в логическом выражении N, то таблица истинности будет содержать 2^N строк, так как существует 2^N различных комбинаций возможных значений аргументов.

Действия над высказываниями

Операция НЕ — логическое отрицание (инверсия)

Операция логического **отрицания** (инверсии) осуществляется над одним высказыванием. Выполнить операцию логического отрицания – значит получить из данного высказывания новое, присоединяя слова «неверно, что …» ко всему высказыванию.

Обозначения: не А, $\overline{A}$, ¬А.

Истинность высказывания $\overline{A}$ определяется таблицей:

отрицание	
A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Операция И — логическое умножение (конъюнкция)

Объединение двух высказываний в одно при помощи союза «И» называется операцией логического умножения. Полученное таким образом высказывание называется логическим произведением (**конъюнкция**).

Например, высказывание А – «В лесу растут грибы», высказывание В – «Льюис Кэрролл – математик», составим произведение этих высказываний АВ – «В лесу растут грибы и Льюис Кэрролл – математик».

Обозначения: А и В, А ∧ В, А & В, А*В.

Истинность произведения высказываний зависит от истинности перемножаемых высказываний и может быть определена с помощью следующей таблицы:

Логическое произведение		
A	B	AB
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Операция ИЛИ — логическое сложение (дизъюнкция, объединение)

Объединение двух высказываний в одно с помощью союза «ИЛИ», употребляемого в неисключающем смысле, называется операцией логического сложения (**дизъюнкция**).

Например, высказывание *А* – «Декабрь – зимний месяц», *В* – «Летом иногда идет дождь», определим высказывание *А*+*В* – «Декабрь – зимний месяц или летом иногда идет дождь».

Обозначения: А или В, А ∨ В, А + В.

Установить истинность логической суммы можно с помощью следующей таблицы:

Логическое сложение		
A	*B*	*A+B*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Операция «ЕСЛИ-ТО» — логическое следование (импликация)

Эта операция связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием, а второе — следствием из этого условия.

Применяемые обозначения: если А, то В; А влечет В; А→ В.

Таблица истинности:

A	B	A ? B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Результат операции следования (импликации) ложен только тогда, когда предпосылка А истинна, а заключение В (следствие) ложно.

Операция «А тогда и только тогда, когда В» (эквивалентность, равнозначность)

Применяемое обозначение: А ↔ В, А≡ В.

Таблица истинности:

A	B	A↔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Результат операции эквивалентность истинен только тогда, когда А и В одновременно истинны или одновременно ложны.

Приоритет логических операций

- Действия в скобках
- Инверсия
- Конъюнкция
- Дизъюнкция (строгая и нестрогая)
- Импликация
- Эквивалентность

Основные аксиомы и законы алгебры логики

Аксиомы: свойства констант 0 и 1: идемпотентность:	1+A=1 0*A=0 0+A=A 1*A=A A+A=A A*A=A
Закон исключения третьего: **Закон непротиворечивости:** **Закон отрицания:**	A+ ¬A=1 A* ¬A=0 ¬ (¬A)=A
Законы коммутативности:	A+B=B+A A*B=B*A
Законы ассоциативности:	A+B+C=A+(B+C) A*B*C=A*(B*C)
Законы дистрибутивности:	A*(B+C)=A*B+A*C A+(B*C)=(A+B)*(A+C)
Законы де Моргана:	¬ (A+B)= ¬A* ¬B ¬ (A*B)= ¬A+ ¬B
Законы поглощения:	A+A*B=A A*(A+B)=A

Пользуясь определенными выше операциями, можно из простых высказываний образовывать сложные, составляя логические формулы. Значения логических формул для разных наборов входящих в нее высказываний можно определить, построив таблицу истинности. Например, для формулы $\overline{A\overline{B}}$ таблица истинности будет иметь вид

A	**B**	$\overline{B}$	$A\overline{B}$	$\overline{A\overline{B}}$
1	**1**	0	0	1
1	**0**	1	1	0
0	**1**	0	0	1
0	**0**	1	0	1

Тождественные высказывания. Эквивалентные высказывания. Формулы Августа де Моргана.

Среди высказываний особое место занимают те, в таблице истинности которых либо одни единицы, либо только нули. Это означает, что высказывание либо всегда истинно, либо ложно, независимо от истинности входящих в него высказываний. Например, высказывание $A+\overline{A}$ всегда истинно, а высказывание $A\overline{A}$ всегда ложно. Доказать это можно составив таблицу истинности этих высказываний.

Сложные высказывания, истинные при любых значениях входящих в них других высказываний, называются тождественно истинными, а высказывания, ложные при любых значениях входящих в них других высказываний, называются тождественно ложными.

Тождественно истинные или тождественно ложные высказывания, если они встречаются в формулах, заменяются в них, соответственно единицей или нулем:

$B+A\overline{A}=B+0$, $A+(B+\overline{B})=A+1$.

Среди высказываний встречаются такие, таблицы истинности которых совпадают. Эти высказывания

называются эквивалентными. Эквивалентными являются, например, высказывания $\overline{A\overline{B}}$ и $\overline{A}+B$ (то есть $\overline{A\overline{B}}=\overline{A}+B$). Это можно проверить составив таблицы истинности этих высказываний:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A\overline{B}$	$\overline{A\overline{B}}$	$\overline{A}+B$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Операции алгебры высказываний обладают следующими важными свойствами:

Свойства логических операций	
Логическое умножение:	Логическое сложение:
$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
$(AB)C = A(BC)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
$A \cdot A = A$	$A + A = A$
$A \cdot 1 = A$	$A + 1 = 1$
$A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$
$A(B + C) = AB + AC$	$A + BC = (A + B)(A + C)$
$\mathbf{\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}}$	$\mathbf{\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}}$

Отрицание:

$$\overline{\overline{A}} = A; \quad \overline{1} = 0; \quad \overline{0} = 1$$

Формулы, выделенные жирным шрифтом, называются формулами Августа де Моргана (1806–1871). Используя эти формулы, можно, в частности, преобразовывать высказывания: сложные заменять более простыми.

В алгебре высказываний, как и в другой алгебре, возможны тождественные преобразования, но логическое сложение и умножение обладают специфическими свойствами $A + A = A$, $AA = A$, $A + 1 = A$. Это приводит к необычности действий над многочленами алгебры высказываний. Пусть нужно перемножить два сложных высказывания:

$(A + B)(A + C) = AA + AC + AB + BC = A + AB + AC + BC$.

Рассмотрим теперь два первых слагаемых $A + AB = A(1 + B) = A1 = A$ и аналогично $A + AC = A$. Таким образом, окончательно получаем $(A + B)(A + C) = A + BC$.

Преобразование $A + AB = A$ очень часто встречается в алгебре высказываний и называется «поглощение». Есть еще один вид столь же часто встречающегося тождественного преобразования, которое называется «склеивание».

Суть его состоит в следующем: $AB + A\overline{B} = A$ (склеивание произошло по символу B). Соответственно для сложного высказывания $ABC + AB\overline{C}$ склейку можно произвести по символу C, то есть имеет место тождественное преобразование $ABC + AB\overline{C} = AB$.

Решение логических задач

Рассмотренных выше законы алгебры высказываний могут быть применены к решению логических задач. Рассмотрим пример.

Задача: Алеша, Боря и Гриша откопали древний сосуд. О том, где и когда он был изготовлен, каждый из школьников высказал по два предположения:

Алеша: «Это сосуд греческий и сосуд изготовлен в V веке»;

Боря: «Это сосуд финикийский и сосуд изготовлен в III веке»;

Гриша: «Это не греческий сосуд и изготовлен он в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном их двух своих предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

Решение:

Введем обозначения простых высказываний:

«Это сосуд греческий» – G;

«Это сосуд финикийский» – *F*;

«Сосуд изготовлен в V веке» – 5;

«Сосуд изготовлен в III веке» – 3;

«Сосуд изготовлен в IV веке» – 4.

Можно составить формулы высказываний каждого из школьников с учетом высказывания учителя. Формула Алешиного высказывания имеет вид *G*5. Учитель сказал, что Алеша прав только в одном из своих утверждений, поэтому либо *G* = 1, либо 5 = 1. Истинным будет высказывание $G\overline{5}+\overline{G}5=1$, то есть высказывание «Сосуд греческий и изготовлен не в 5 веке или сосуд не греческий и изготовлен в 5 веке». Аналогично, высказывание Бори можно представить формулой $F\overline{3}+\overline{F}3=1$и высказывание Гриши формулой $\overline{G}\,\overline{4}+G4=1$.

Полученные формулы можно рассматривать как логические уравнения и решать систему:

$$\begin{cases} G\overline{5}+\overline{G}5=1 \\ F\,\overline{3}+\overline{F}\,3=1 \\ \overline{G}\,\overline{4}+G4=1 \end{cases}.$$

Первое высказывание умножается на второе:

$$(G\overline{5}+\overline{G}\,5)(F\,\overline{3}+\overline{F}\,3)=GF\,\overline{5}\,\overline{3}+G\overline{F}\overline{5}3+\overline{G}5F\,\overline{3}+\overline{G}\,5\overline{F}\,3=1.$$

Произведение $GF\overline{5}\,\overline{3}$– ложно потому, что сосуд не может быть изготовлен одновременно в Греции и Финикии, произведение $\overline{G}5\overline{F}3$– ложно потому, что сосуд не может быть изготовлен одновременно в 3 и 5 вв. После исключения этих высказываний получается следующее уравнение: $G\overline{F}\,\overline{5}3+\overline{G}5F\,\overline{3}=1$. Это уравнение умножается на третье логическое уравнение составленной системы:

$$(G\overline{F}\overline{5}3+\overline{G}5F\,\overline{3})(\overline{G}\overline{4}+G4)=G\overline{F}\,\overline{5}3\overline{G}\overline{4}+G\overline{F}\,\overline{5}3G4+\overline{G}5F\,\overline{3}\overline{G}\overline{4}+\overline{G}5F\,\overline{3}G4=\overline{G}5F\,\overline{3}\overline{G}\overline{4}=1.$$

Высказывания $G\overline{F}\overline{5}3\overline{G}\overline{4}$, $G\overline{F}\overline{5}3G4$, $\overline{G}5F\overline{3}G4$ исключены как ложные. Из полученного высказывания $\overline{G}5F\overline{3}\overline{G}\overline{4}=1$ следует, что «Сосуд изготовлен в Финикии и сосуд изготовлен в 5 веке». Это утверждение согласуется с данными поставленной задачи.

На примере решения логической задачи продемонстрирована смысловая взаимосвязь входящих в сложное высказывание простых высказываний. В состав сложных высказываний могут входить взаимосвязанные по смыслу высказывания, однако высказывания могут быть и противоречивыми.

Таким образом, одним из применений алгебры высказываний является использование ее для анализа сложных, а подчас противоречивых текстов. Алгебра высказываний позволяет научиться моделировать простейшие мыслительные процессы.

«Методы эти позволяют Вам обрести ясность мысли, способность находить собственное оригинальное решение трудных задач, вырабатывают у Вас привычку к систематическому мышлению и, что особенно ценно, умение обнаруживать логические ошибки, изъяны и пробелы тех, кто не пытался овладеть привлекательным искусством логики. Попытайтесь. Вот все, о чем я прошу вас»

Льюис Кэрролл
(псевдоним Чарльза Лютвиджа Доджсона (1832–1898)) – известный английский математик и литератор.