СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИЙ С № 6 ПО № 7

ЛЕКЦИЯ № 6

6. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ОШИБОК

6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

При выполнении геодезических работ производят измерения углов, расстояний, площадей, превышений и т. п. Под измерением некоторой величины X понимают ее сравнение с эталонной величиной q, принятой за единицу меры. Результатом измерения величины является число l, показывающее, сколько раз единица измерения укладывается в измеряемой величине. В общем случае число l может быть целым, дробным, большим или меньшим единицы.

Определения величин могут быть непосредственными и косвенными. В первом случае производится непосредственное сравнение измеряемой величины с единицей меры. Во втором — необходимую величину получают при помощи вычислений, проводимых по другим непосредственно измеренным величинам. Примером косвенных определений может служить вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника по измеренным катетам.

Если измерение некоторой величины производится в однородной среде одним наблюдателем, одним и тем же прибором, в одинаковых условиях, то их называют равноточными измерениями В противном случае измерения называют неравноточными.

В количественном отношении измерения подразделяются на необходимые и избыточные (добавочные). Например, если некоторый отрезок прямой линии на местности измерен n раз, то необходимым является одно измерение, остальные n-l измерения — избыточные. Избыточные измерения служат средством контроля и позволяют судить о качестве измерений, а также позволяют определять с большей точностью искомую величину.

6.2. ПОНЯТИЯ О ПОГРЕШНОСТЯХ ИЗМЕРЕНИЙ

Результаты измерений всегда содержат некоторую погрешность. Под погрешностью δ результата измерений *l* понимают разность

$\delta = l - X,$

где X—точное значение измеренной величины.

Измерения, проводимые определенным прибором, по всей видимости, не могут быть произведены с меньшей погрешностью, чем погрешность, обеспечиваемая измерительным прибором. Например, если измеряется расстояние мерным прибором (рулеткой), длина которого определена с погрешностью 0,1 %, то нельзя получить конечный результат с погрешностью 0,01 %.

На практике не следует производить измерения с наибольшей достижимой точностью, так как повышение точности измерений ведет к удорожанию измерительных работ, поэтому точность измерений должна соответствовать поставленной задаче.

Погрешности, возникающие при измерениях, подразделяют на грубые, систематические и случайные.

При измерениях не должны появляться погрешности больше предела, установленного для данных условий. Однако, иногда встречаются грубые погрешности, которые происходят от недостаточного внимания исполнителей при измерениях. Например, при измерении линий лентой имеют место случаи просчета лент, а при измерении углов - случаи просчета нескольких градусов или десятков минут. Грубые погрешности обнаруживают путем повторения измерения и сравнения их результатов. Если расхождения между результатами превосходят заданный допуск, то эти измерения выбраковывают и производят заново.

К систематическим погрешностям относятся погрешности, вызываемые факторами, действующими одинаковым образом при нескольких повторных измерениях. Такие погрешности возникают в силу ряда причин: несовершенства приборов (инструментальные погрешности); действия внешних условий измерения (погрешности среды); действия личных качеств наблюдателя и др. При рациональной организации измерений (наблюдений) и технических усовершенствованиях систематические погрешности удается исключить или свести их до минимума.

К случайным погрешностям относятся все остальные погрешности, исключить которые не представляется возможным. Например, при отсчете по делениям линейки появляются случайные погрешности из-за неточности оценки на глаз долей интервалов между двумя штрихами линейки и др. Случайные погрешности носят такое название потому, что они в отдельных измерениях отличаются друг от друга, причем эти различия имеют случайный характер.

Точность проведенного измерения может быть оценена по абсолютной погрешности или по относительной погрешности. Например, при измерении углов удобной мерой точности является абсолютная величина погрешности, а при оценке измеренных расстояний более удобна относительная погрешность. Относительная погрешность $\delta_{отн.}$ представляет собой отношение абсолютной величины погрешности бабе к измеряемой величине l, т. е.

$$\delta_{отн.} = \frac{\delta_{абс.}}{l}$$

Относительная погрешность часто выражается в процентах:

$$\delta_{отн.} = \frac{\delta_{абс.}}{l} \times 100\%$$

Рассмотрим два случая измерения расстояния: в первом - измерена линия длиной 100 м с абсолютной погрешностью 1 см и во втором - линия длиной 1000 м измерена с той же абсолютной погрешностью. Если судить по абсолютным погрешностям, то создается впечатление, что точности измерений одинаковы в обоих случаях. Если использовать относительные погрешности, то оказывается:

для первой длины

$\delta_{отн.}$ = *1 см/10000 см= 1/10000;*

для второй длины $\delta_{отн.}$ *=1 см/100000 см= 1/100000.*

Таким образом, точность измерения во втором случае на порядок выше, чем в первом.

6.3. СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Случайные погрешности обладают четырьмя свойствами.

Свойство 1. При измерениях равновероятно возникновение случайных погрешностей, равных по величине и противоположных по знаку.

Свойство 2. Малые по абсолютной величине случайные погрешности встречаются чаще, чем большие,

Свойство 3. При данных условиях измерений случайные погрешности по абсолютной величине не могут превосходить известного предела.

Свойство 4. Среднее арифметическое из случайных погрешностей равноточных (одинаково точных) измерений стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений.

Выразим в математической форме третье свойство случайных погрешностей. Для этого возьмем достаточно большое количество измерений l_1, l_2, $l_3 \ldots l_n$ некоторой величины, истинное значение которой X. Вычислим погрешности измерений:

$$\delta_1=l_1-X;\ \delta_2=l_2-X;\ldots.\ \delta_n=l_n-X; \qquad 6.1$$

Согласно третьему свойству,

$$\lim_{n\to\infty}(\delta_1+\delta_2+\ldots\delta_n)/n=0$$

или в другой записи

$$\lim_{n\to\infty}\ [\delta]/n=0 \qquad 6.2$$

где $[\delta]$ обозначает сумму отклонений измеренной величины от истинного значения той же величины.

6.4. СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ - результаты измерений некоторой величины. X - истинное значение этой величины, ее истинные погрешности выразим разностями (5.1). Сложив правые и левые части, получим

$\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n=(l_1+l_2+\ldots l_n)-nX,$ т. е.

$[\delta]=[l]$-nX.

Разделив на n, запишем

$$X=\frac{[l]}{n}-\frac{[\delta]}{n}.$$

Учитывая свойство (2), будем иметь

$$X=\frac{[l]}{n} \qquad 6.3$$

откуда видно, что арифметическая середина может быть принята за истинное значение измеренной величины.

6.5. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ СЕРЕДИНА. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА. ПРЕДЕЛЬНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ОШИБКИ. ФОРМУЛА БЕССЕЛЯ.

Исходя из четвертого свойства случайных ошибок при геодезических измерениях одинаковой точности, за окончательный результат принимают среднее арифметическое из ряда измерений. Если измерена, одна и та же величина n раз и получены результаты:

$l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$, то

$$X=\frac{l_1+l_2+l_3+\ldots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n} \qquad 6.4$$

Величина X называется арифметической срединой или вероятнейшим значением измеренной величины.

Разности (5.5) между каждым измерением и арифметической срединой называются вероятнейшими ошибками измерений.

$$l_1-x=V_1$$

$$l_2\text{-}x=V_2$$

$$l_3\text{-}x=V_3 \qquad 6.5$$

………

$$l_n\text{-}x=V_n$$

Сложив равенства (5.5) , получим

$$[l]-nx=[V] \qquad 6.6$$

Из формул (5.4) и (5.6) следует, что $[V]$=0.

Точность результатов измерений оценивается средней квадратической ошибкой. Средняя квадратическая ошибка одного измерения вычисляется по формуле:

$$m=\sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}} \qquad 6.7$$

где $[V^2]$ - сумма квадратов вероятнейших ошибок;

n - число измерений.

Средняя квадратическая ошибка арифметической средины вычисляется по формуле:

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{[V^2]}{n(n-1)}} \qquad 6.8$$

Предельная средняя квадратическая ошибка не превышает утроенной средней квадратической ошибки, т.е.

$$E_{пред.}=3m \qquad 6.9$$

Пример: Линия измерена четыре раза. Определить ее вероятнейшую длину и оценить точность этого результата. Вычисления приведены в табл.6.1

$$m=\sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}=\sqrt{\frac{350}{3}}=\pm 10{,}8 \text{ см.}$$

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm 5{,}4 \text{ см.}$$

По Формулам (5.7) и (5.8) вычислены абсолютные средние квадратические ошибки, а оценить точность измерения длины линии необходимо по относительной ошибке.

Таблица 6.1.

№ п.п.	Длина линии, мм		
1.	225,15	-5	25
2.	225,20	0	0
3.	225,10	-10	100
4.	225,35	15	225
X	225,20	$[V]=0$	$[V^3]=350$

Поэтому нужно абсолютную ошибку разделить на длину линии. Для нашего примера относительная ошибка вероятнейшего значения измеренной линии равна:

$$\frac{M}{X}=\frac{5,4}{22520}=\frac{1}{4170}$$

ЛЕКЦИЯ № 7

7. СРЕДНИЕ КВАДРАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН.

7.1. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ФУНКЦИЙ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Если мы имеем функцию суммы или разности двух независимых слагаемых

$$Z = X + Y, \qquad 7.1$$

то квадрат средней квадратической ошибки функции выразится формулой:

$$m_z^2 = m_y^2 + m_x^2 \qquad 7.2$$

При $m_x = m_y = m$

$$m_z = m\sqrt{2} \qquad 7.3$$

Пример. Линия на плане масштаба 1:5000 измерена по частям. Одна часть длиной 600,0 м, вторая часть длиной 400,5 м, Найти средние квадратические ошибки суммы и разности этих длин и соответствующие относительные ошибки.

Ответ. Средняя квадратическая ошибка суммы и разности двух длин будет равна: m=0,5$\sqrt{2}$ = ±0,7 м. Относительные ошибки суммы и разности длин соответственно равны:

$$\frac{0,7}{1000,5} = \frac{1}{1429} \; и \; \frac{0,7}{199,5} = \frac{1}{285}$$

Если функция имеет вид

$$Z=X_1 \pm X_2 \pm X_3 \pm \ldots . \pm X_n, \qquad 7.4$$

$$\text{то } m_z^2= m_1^2+ m_2^2+\ldots .+ m_n^2 \qquad 7.5$$

т.е. квадрат средней квадратической ошибки алгебраической суммы аргументов равен сумме квадратов средних квадратических ошибок спасаемых.

Если $m_1= m_2= m_3= \ldots.=m_n= m$, то формула (6.5) примет вид:

$$m_z=m\sqrt{n}, \qquad 7.6$$

т.е. средняя квадратическая ошибка алгебраической суммы (разности) n измеренных с одинаковой точностью величин в $\sqrt{n}$ раз больше средней квадратической ошибки одного слагаемого.

Например, в шестиугольнике каждый угол измерен с одинаковой точностью ±0,5, то средняя квадратическая ошибка суммы всех измеренных углов будет равна $m_z = \pm\, 0{,}5\sqrt{6} = \pm\, 1{,}2$.

Если функция имеет вид

$$Z = k_1x_1 \pm k_2x_2 \pm k_3x_3 \pm \ldots\ldots \pm k_nx_n, \qquad 7.7$$

$$\text{то } m_z^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + k_3^2 m_3^2 + \ldots\ldots + k_n^2\, m_n^2 \qquad 7.8$$

где $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ - постоянные числа;

$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$- средние квадратичаркие ошибки соответствующих аргументов.

Если имеем функцию многих независимых переменных общего вида

$$Z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \qquad 7.9$$

то

$$m_z^2 = \left(\frac{df}{dx_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{df}{dx_2}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{df}{dx_3}\right)^2 m_3^2 + \ldots + \left(\frac{df}{dx_m}\right)^2 m_n^2 \qquad 7.10$$

Из формулы (6.10) следует, что квадрат средней квадратической ошибки функции общего вида, равен сумме квадратов произведений частных производных по каждому аргументу на среднюю квадратическую ошибку соответствующего аргумента.

Пример. В прямоугольнике измерены две стороны а =100,2 м со средней квадратической ошибкой ± 5 см и b = 215,30 м со средней квадратической ошибкой ± 10 см. Найти среднюю квадратическую ошибку площади прямоугольника.

Ответ. Функция имеет вид $P = ab$

$$m_p^2 = \left(\frac{dp}{da}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{dp}{db}\right)^2 m_b^2;$$

$$\left(\frac{dp}{da}\right) = b,\ \left(\frac{dp}{db}\right) = a, \quad m_p = \sqrt{b^2 m_a{}^2 + a^2 m_b{}^2}$$

$$m_p = \sqrt{215{,}30^2 \times 0{,}05^2 + 100{,}20^2 \times 0{,}10^2} = \pm 14{,}7\ м^2.$$

7.2. ПОНЯТИЕ О НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ.

Неравноточными измерениями называются такие, которые выполнены различным числом приемов, приборами различной точности и т.д.

Если измерения неодинаковой точности, то для определения общей арифметической середины и пользуются формулой:

$$X_0 = \frac{l_1 P_1 + l_2 P_2 + l_3 P_3 + ... + l_n P_n}{P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n} = \frac{[lP]}{[P]} \qquad 7.11$$

где $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ - соответствующие веса неравноточных измерений $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$.

Весом называется число, которое выражает степень доверия к результату измерения. Для удобства вычислений веса можно увеличивать или уменьшать в одинаковое число раз.

В тех случаях, когда неизвестны веса измеренных величин, а известны их средние квадратические ошибки, то веса можно вычислить по формуле:

$$P = 1/m^2 \qquad 7.12$$

т.е. вес результата измерений обратно пропорционален квадрату средней квадратической ошибки.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ